数学理系第 6 問

座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) をみたしながら動く。

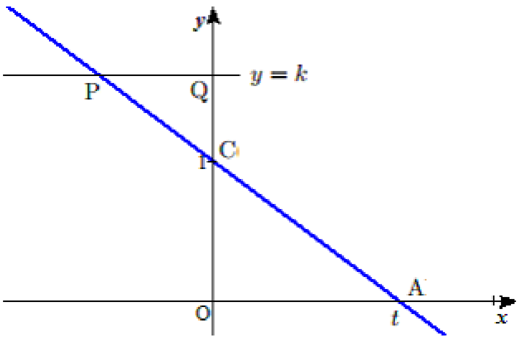
(a) 点 A は平面 $z=0$ 上にある。

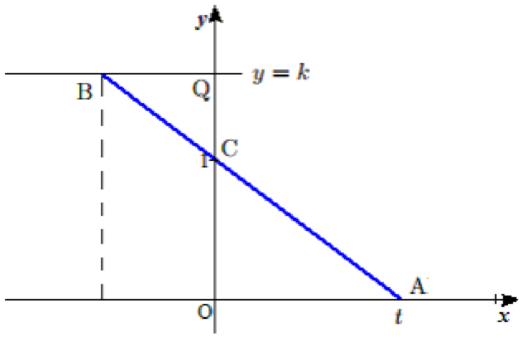
(b) 点 C(0，0，1) が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

xy 平面内で，$\mathrm{A}(t,0)$ $(0 \leqq t \leqq \sqrt{3})$ として，直線 $y=k$ $(1 \leqq k \leqq 2)$ と線分 AB の交点が動く範囲を求める。まず，直線 AB と $y=k$ の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，$(0,k)$ を Q として，左下図より $\mathrm{PQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{QC}:\mathrm{OC} \iff -x:t=(k-1):1 \iff x=t-kt$ だから $\mathrm{P}(-t(k-1),\ k)$ であり，P の x 座標は t に対して単調に減少する。

従って，線分 AB と $y=k$ の交点が最も左側にあるのは，これらが交わるときの t が最大になるとき，すなわち B が $y=k$ 上にくるときである。このとき，右下図のように AB^2 について $(t-x)^2+k^2=4$，これと $x=t-kt$ より，$x=-\dfrac{k-1}{k}\sqrt{4-k^2}$





よって線分 AB と $y=k$ の交点は，$-\dfrac{k-1}{k}\sqrt{4-k^2} \leqq x \leqq 0$ の範囲を動くから，

求める体積は

$$\pi\int_1^2\left(-\frac{k-1}{k}\sqrt{4-k^2}\right)^2 dk=\pi\int_1^2\left(\frac{k-1}{k}\right)^2(4-k^2)\,dk$$

$$=\pi\int_1^2\left(1-\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right)(4-k^2)\,dk=\boldsymbol{\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)\pi}$$

◆コメント◆

今年の問題の中ではかなり解きやすいです。積分計算は，どんどん展開して項をばらしたほうが早いでしょう。