数学理系第 5 問

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \fallingdotseq 0$ とする。

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。

$$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$$

をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

(1) $0.a_1a_2\cdots a_k=\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}=f_k$ とおく。

与不等式は $f_k \leqq \sqrt{n}-10^k<f_k+10^{-k}$

$$\iff \left(f_k+10^k\right)^2 \leqq n<\left(f_k+10^{-k}+10^k\right)^2$$

$$\iff \left(f_k+10^k\right)^2 \leqq n<\left(f_k+10^k\right)^2+2\left(f_k+10^k\right)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}$$

$$\iff {f_k}^2+2\cdot 10^k f_k+10^{2k} \leqq n<{f_k}^2+2\cdot 10^k f_k+10^{2k}+2\left(f_k+10^k\right)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}$$

ここで $2\cdot 10^k f_k+10^{2k}$ は正の整数なので l とおき，

$g(k)={f_k}^2+2\left(f_k+10^k\right)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}$ とすれば ${f_k}^2+l \leqq n<g(k)+l\cdots$①

ここに $g(k)={f_k}^2+2f_k\cdot 10^{-k}+10^{-2k}+2=\left(f_k+10^{-k}\right)^2+2>2$

さらに $g(k) \leqq \left(\dfrac{9}{10}+\dfrac{9}{10^2}+\cdots+\dfrac{9}{10^k}+10^{-k}\right)^2+2=1+2=3$（繰り上がり），$0<{f_k}^2<1$

よって，①から，n として可能なものは $n=l+1$，$l+2$

すなわち

$$\boldsymbol{n=2\left(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k\right)+10^{2k}+1,}$$
$$\boldsymbol{2\left(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k\right)+10^{2k}+2}$$

(2) $0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$

$$\iff {f_k}^2 + 2pf_k + p^2 \leqq m < {f_k}^2 + 2pf_k + p^2 + 10^{-2k} + 2\left(f_k + p\right)10^{-k} \cdots ②$$

ここで $h\left(k\right) = 10^{-2k} + 2\left(f_k + p\right)10^{-k}$ とおくと

$h\left(k\right) \geqq 10^{-2k} + 2\left(f_k + 5 \cdot 10^{k-1}\right)10^{-k} = 10^{-2k} + \left(2f_k + 10^k\right)10^{-k}$

$= 10^{-2k} + 2f_k \cdot 10^{-k} + 1 > 1$

区間の幅が 1 以上，${f_k}^2 + 2pf_k + p^2 > 0$ なので，②をみたす正の整数 m が存在する。（証明終）

(3) 正の整数 s が $\sqrt{s} - [\sqrt{s}\ ] = f_k \cdots ③$ を満たしていると仮定すると，$\sqrt{s}$ は有理数でなければならないので，$\sqrt{s} = \dfrac{b}{a}$(a, b は互いに素な正整数) とおける。

このとき $s = \dfrac{b^2}{a^2}$ だから，これが整数値になるためには $a = 1$ でなければならず，s は平方数となるから，$\sqrt{s}$ は正の整数で，$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\ ] = 0$

よって③に矛盾する。

ゆえに正の整数 s が③を満たすことはない。（証明終）

◆コメント◆

ひたすら計算のようでいて，どの項に目を付けようかと考えるのも楽しいです。(3) は脈絡がない基本問題で，ここまで解いた人へのボーナスかもしれません。東大では珍しいケースです。

ⓒ東京凰鑑学院