

数学理系第4問

z を複素数とする。複素数平面上の3点 $A(1)$, $B(x)$, $C(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

$z = x + yi$ とおくと、三角形ができる条件から $y \neq 0 \dots \textcircled{1}$

このとき $z \neq 1$ だから

$$\angle BAC = \arg \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \arg(z + 1) = \arg(x + 1 + yi)$$

$$\angle CBA = \arg \frac{1 - z}{z^2 - z} = \arg\left(-\frac{1}{z}\right) = \arg(-x + yi)$$

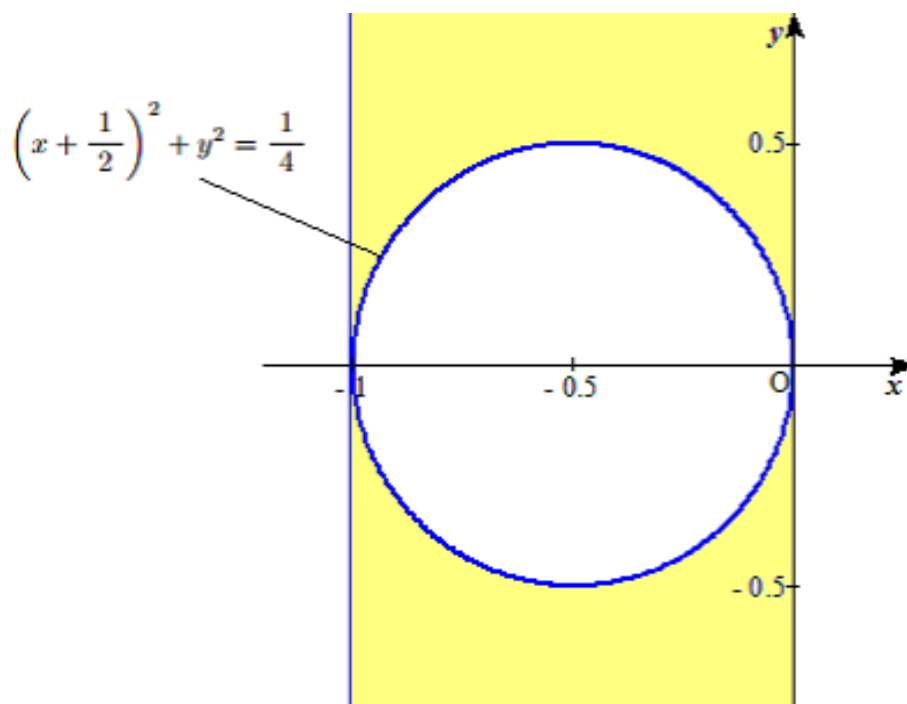
$$\angle ACB = \arg \frac{z - z^2}{1 - z^2} = \arg \frac{z}{1 + z} = \arg(x^2 + x + y^2 + yi)$$

偏角 θ が $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にある条件は、それぞれの実数部分が正であることである。ゆえに

$$x + 1 > 0, \quad -x > 0, \quad x^2 + x + y^2 > 0 \iff -1 < x < 0, \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4}$$

これらが満たされていれば $\textcircled{1}$ も満たされる。

よって求める領域は以下の黄色部分で、境界を含まない。



◆コメント◆

複素数平面は、あまり難しく考えず、多くの場合とにかく $x + yi$ でゴリゴリ計算が、安全最速です。