数学理系第 3 問

a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$, $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ 上の点は，実数 s, t, u を用いて次のように表せる。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+s\overrightarrow{\mathrm{QP_1}}=(s,\ 0,\ s(1-a)+a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{QP_2}}=(t,\ t,\ t(1-a)+a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+u\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}=(u,\ 0,\ u(3-a)+a)$

各式で z 座標を 0 とおいて，$s=\dfrac{a}{a-1}$, $t=\dfrac{a}{a-1}$, $u=\dfrac{-a}{3-a}$

これより，$\mathrm{R}_1\left(\dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$, $\mathrm{R}_2\left(\dfrac{a}{a-1},\ \dfrac{a}{a-1}\right)$, $\mathrm{R}_3\left(\dfrac{-a}{3-a},\ 0\right)$

$$\therefore\ S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-1}-\frac{-a}{3-a}\right)\cdot\frac{a}{a-1}=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

簡単のため $a-1=p$ とおくと $0<p<2$, $S(a)=\dfrac{(p+1)^2}{p^2(2-p)}$

これを $T(p)$ とおいて，$T'(p)=(p+4)(p+1)p(p-1)$

増減表（略）から，$p=1$ のとき $T(p)$ は最小値 4 をとる。

よって，$a=2$ のとき $S(a)$ は最小値 4 をとる

◆コメント◆

手が止まることのない，今年最大の点取り問題です。