数学理系第１問

e を自然対数の底すなわち $e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}$$

$f(x) = \log\left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\} = x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ とおく。

$f'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$，$f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} < 0$

よって $f'(x)$ は単調減少だから $f'(x) > \lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$

ゆえに $f(x)$ は単調増加であり，従って $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ も単調増加だから，

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

次に，$g(x) = \log\left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}\right\} = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ とおくと，

$g(x) = f(x) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ より $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2x(x+1)^2}$

$g''(x) = f''(x) + \frac{2x+1}{2x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0$

よって $g'(x)$ は単調増加。 $\therefore\ g'(x) < \lim_{x \to \infty} g'(x) = 0$

ゆえに $g(x)$ は単調減少であり，従って $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}$ も単調減少だから，

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}} > \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \infty}\left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} = e$

よって題意は示された。（証明終）

◆コメント◆

二回微分するタイプの，よくある手法ですが，問題文も不等式も非常によくできていて，増減＆極限に結びつけろという出題者の親切な意図が，しっかりと伝わってきます。よく練られた出題といえるでしょう。