数学文系第４問

以下の問いに答えよ。ただし，(1) については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

(1) $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ として，$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 3 & (n = 4k-3) \\ 9 & (n = 4k-2) \\ 7 & (n = 4k-1) \\ 1 & (n = 4k) \end{cases}}$

(2) $b_1 = 3,\ b_2 = 1$ である。$k,\ p$ を正整数として，3^{2k-1} を 4 で割った余りが 3，すなわち $3^{2k-1} = 4p-1$ と仮定すると，$3^{2k+1} = 36p-9 = 36p-8-1$ だから 3^{2k+1} を 4 で割った余りも 3 である。同様に，3^{2k} を 4 で割った余りが 1，すなわち $3^{2k} = 4p-3$ と仮定すると $3^{2(k+1)} = 36p-27 = 36p-24-3$ で，$3^{2(k+1)}$ を 4 で割った余りも 1 である。以上から帰納的に $\boldsymbol{b_n = \begin{cases} 3 & (n = 2k-1) \\ 1 & (n = 2k) \end{cases}}$

(3) $x_2 = 3$ を 4 で割った余りは 3 である。$k,\ p$ を正整数として，$n \geqq 2$ のとき，x_n を 4 で割った余りが 3 であると仮定し $x_n = 4k-1$ とおくと，$x_{n+1} = 4^{x_n} = 3^{4k-1}$ は 3 の奇数乗だから，(2) より，x_{n+1} を 4 で割った余りは 3 である。以上より帰納的に，$x_2,\ x_3,\ \cdots$ を 4 で割った余りはすべて 3 である。$x_{10} = 3^{x_9}$ において，x_9 を 4 で割った余りも 3 だから，(1) より x_{10} を 10 で割った余りは **7**

◆コメント◆

サクサクと試して，ライトな帰納法で確認，という解きやすい問題でした。しかし，(3) を (1)(2) と関連づけるところは，慣れていないと苦戦したでしょう。ちなみに x_9 は 3 の累乗ですから，3 の奇数乗であることは明らか…なはずですが，もともと $3^{3^{3^{\cdots}}}$ のような数であり，高等学校では見慣れないものなので，明らかと規定していいかどうか，というところから，安全を考え帰納的に示してみました。