数学文系第３問

　座標平面上の２つの放物線

$A : y = x^2$

$B : y = -x^2 + px + q$

が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

(1) $A,\ B,\ C$ を順に $y = f(x)$，$y = g(x)$，$y = h(x)$ とおく。

$x = -1$ における値 $f(-1) = g(-1) \iff p - q = 2$

$x = -1$ における微分係数 $f'(-1) = g'(-1) \iff p = -4$

これらから，$\boldsymbol{p = -4,\ q = -2}$

(2) (1) より $h(x) = -x^2 + 4(t-1)x - 4t^2 + 9t - 2$ だから，

$f(x) = h(x) \iff 2x^2 - 4(t-1)x + (4t-1)(t-2) = 0$

この方程式の解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，

$\alpha + \beta = 2(t-1)$，$\alpha\beta = \dfrac{(4t-1)(t-2)}{2}$ なので，

実数解条件は $(\alpha - \beta)^2 \geqq 0 \iff 2t^2 - 5t \geqq 0$ で，$t > 0$ だから $0 \leqq t \leqq \dfrac{5}{2}$

このとき $S(t) = \dfrac{1}{6} \cdot 2(\beta - \alpha)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}\left(-4t^2 + 10t\right)^{\frac{3}{2}}$

よって，$\boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(-4t^2 + 10t\right)^{\frac{3}{2}} & \left(0 < t \leqq \dfrac{5}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{5}{2} < t\right) \end{cases}}$

(3) $S(t) = \dfrac{1}{3}\left\{-4\left(t - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{25}{4}\right\}^{\frac{3}{2}} \leqq \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{125}{24}}$

◆コメント◆

二次関数の計算で，これも毎年出ています。この分野は絶対に落とせません。