数学文系第２問

A，B，C の３つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，２連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) １試合目で A と B が対戦する。

(b) ２試合目で，１試合目の勝者と，１試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は２以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) ちょうど５試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) n を２以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

勝者が決まらない場合の対戦は次のようになる。

試合回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
１試合目で A が勝つ	AB	AC	CB	BA	AC	CB	BA	AC	CB	BA
１試合目で B が勝つ	AB	BC	CA	AB	BC	CA	AB	BC	CA	AB

また，A が優勝する場合には，A が２連勝する必要があることから，一段目の 2，5，8⋯回目と二段目の 4，7，10⋯回目に限られる。

(1) ５回目に A が優勝する確率は表から $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\dfrac{1}{32}}$

(2) 同じく表から求める確率は，$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ として，

$$\begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{(n=3m)} \\ \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} & \boldsymbol{(n=3m-1)} \\ \boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n} & \boldsymbol{(n=3m-2)} \end{cases}$$

(3) 上下段を合わせて，求める確率は

$$P=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}$$

$$=\sum_{i=1}^{3m}\left(\frac{1}{2}\right)^i-\frac{1}{2}-\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{3m}\left(\frac{1}{2}\right)^i-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^i-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}$$

◆コメント◆

超頻出の，等比数列の計算です。今年もこの傾向は健在でした。事象自体はそれほど難しくありません。しかし計算処理のほうは案外攻略していない人が多いので，差がつくでしょう。