

数学文系第1問

座標平面上の3点  $P(x, y)$ ,  $Q(-x, -y)$ ,  $R(1, 0)$  が鋭角三角形をなすための  $(x, y)$  についての条件を求めよ。また、その条件をみたす点  $P(x, y)$  の範囲を図示せよ。

三角形ができる条件は  $y \neq 0 \dots \textcircled{1}$

$PQ^2 = 4x^2 + 4y^2$ ,  $PR^2 = (x-1)^2 + y^2$ ,  $QR^2 = (x+1)^2 + y^2$  から、

$$PQ^2 + PR^2 > QR^2 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \dots \textcircled{2}$$

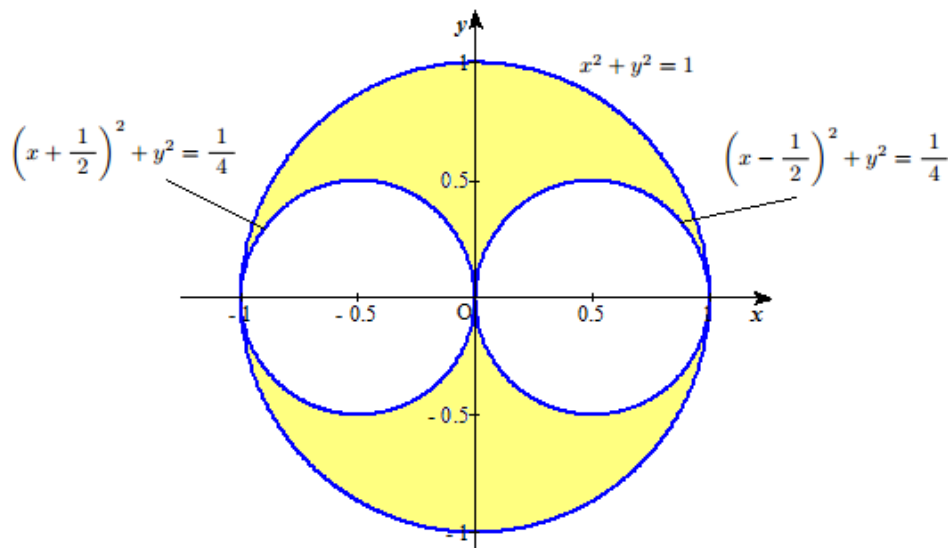
$$PR^2 + QR^2 > PQ^2 \iff x^2 + y^2 > 1 \dots \textcircled{3}$$

$$QR^2 + PQ^2 > PR^2 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \dots \textcircled{4}$$

②～④が満たされれば①も満たされる。以上から求める条件は

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} & \text{かつ} \\ x^2 + y^2 > 1 & \text{かつ} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{cases}$$

領域は下図の黄色の部分で、境界は含まない。



◆コメント◆

本当は、内積で解くのです。が、ベクトルの向きとかを考えるのが面倒なので、こんなふうに原始的な三平方でやってしまう手もあります。つまり、中学レベルでだいたい片付くので、ぜひ得点したいところです。