理系第 5 問

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

【解答例】

$${}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{2015\cdot 2014\cdots(2015-m+1)}{m\,(m-1)\cdot 2\cdot 1}$$

において，m が 1 から増加していくときに，$m!$ の素因数 2 の数と，$A = 2015\cdot 2014\cdots(2015-m+1)$ の素因数 2 の数は，最初全く同じように増加していく。すなわち，m，$2016-m$ がともに偶数の値をとっていても，$Q = \dfrac{2016-m}{m}$ は奇数のままである。

この状態が終わり，A の素因数 2 の数が $m!$ のそれを上回るのは，はじめて $Q = \dfrac{2016-m}{m}$ が偶数になるときである。

$Q = \dfrac{2016}{m} - 1$ より，それは $\dfrac{2016}{m}$ がはじめて奇数になるときである。

$2016 = 2^5 \times 63$ から，そのとき $m = 2^5 = \mathbf{32}$

【コメント】

二項係数の分母と分子の素因数に注目する問題で，難関大では頻出の部類に属します。

2009 年東大理系第 1 問の的中リストもよろしければご参照ください。