理系第 4 問

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。

【解答例】

(1)

与式 $p_{n+2}=\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}$ を用いて $\dfrac{p_{n+2}^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}$ から p_{n+2} を消去すると，

$$\frac{p_{n+2}^2+p_{n+1}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\right)^2+p_{n+1}^2+1}{\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}\cdot p_{n+1}}=\frac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}$$

よって，n によらず一定である。

(2)

$n=1,\ 2,\ 3$ のときを考えて，$\dfrac{p_{n+1}^2+p_n^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ が確かめられる。

与式 $p_{n+2}=\dfrac{p_{n+1}^2+1}{p_n}$ を用いてこの式から p_{n+1}^2 を消去すると $\dfrac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}=3$

$\therefore\ p_{n+1}+p_{n-1}=\boldsymbol{3p_n}$

(3)

(2) から，$p_{n+1}=3p_n-p_{n-1}\cdots$①，与式から $q_{n+2}-q_n=q_{n+1}\cdots$②

ここで, $n=1,\ 2$ のとき, $p_1=q_1=1,\ p_2=q_3=q_1+q_2=2$ であり, $p_n=q_{2n-1}\cdots$③ が成り立っている。そこで，$n=k,\ k-1$ で③が成り立つと仮定すると，

$p_{k+1}=3p_k-p_{k-1}\ \ (\because$ ①$)$

$=3q_{2k-1}-q_{2(k-1)-1}\ \ (\because$ ③$)$

$=3q_{2k-1}-q_{2k-3}=2q_{2k-1}+(q_{2k-1}-q_{2k-3})=2q_{2k-1}+q_{2k-2}\ \ (\because$ ②$)$

$= q_{2k-1} + (q_{2k-1} + q_{2k-2})$ $(\because ②)$

$= q_{2k-1} + q_{2k}$ $(\because ②)$

$= q_{2k+1}$ $(\because ②)$

$= q_{2(k+1)-1}$

よって，$n = k+1$ でも成り立つ。

以上からすべての $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ （証明終）

【コメント】

どの式を使えばよいかを少し試行錯誤すれば確実に解ける問題で，落としたくないところです。試行錯誤するのにはある程度の計算速度が必要ですから，計算練習はやはり欠かせません。