理系第３問

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。

座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p \ (x > 0)$ と $y = \log x \ (x > 0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。

以下の問に答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてもよい。

(1) a および Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してで切る立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

【解答例】

(1)

Q の x 座標を t とする。

$0 < x < 1$ では $\log x < ax^p$ であり，また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x} = \infty$ から，十分に大きな x の値に対しても $\log x < ax^p$ であるから，$x > 0$ で微分可能な両関数の共有点が 1 点のみということは，その点で接していることを意味する。

Q での微分係数が等しい：$apt^{p-1} = \dfrac{1}{t}$　　Q での値が等しい：$at^p = \log t$

これらから Q の x 座標：$t = \boldsymbol{e^{\frac{1}{p}}}$, $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{pe}}$

(2)

$$\pi\int_0^{e^{1/p}}(ax^p)^2\,dx - \pi\int_1^{e^{1/p}}(\log x)^2\,dx = \frac{\pi}{p^2e^2(2p+1)}\Big[x^{2p+1}\Big]_0^{e^{1/p}}$$

$$-\pi\Big[\log x\,(x\log x - x)\Big]_1^{e^{1/p}} + \pi\int_1^{e^{1/p}}\frac{1}{x}(x\log x - x)\,dx = \boldsymbol{\frac{2-4p}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}\pi + 2\pi}$$

(3) (2) で $2 - 4p = 0$ とすればよくて $p = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

【コメント】

単純計算でいける，点取り問題でした。(2) の積分は例年ほどではないにしても，やや重厚でしたが，こういうのだけ確実に得点して東大理系に何とか受かる，という方針もありです。