理系第１問

　正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C:\ y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

【解答例】

与式から $f(a)=4\left(x^2-1\right)a^2-4y\cdot a+1=0$

この a の２次方程式が正の実数解をもつ条件を求めればよい。

(i)　$x^2=1$ のとき，$-4ya+1=0$

あ) $y\neq 0$ のとき，$a=\dfrac{1}{4y}>0$ より条件は $y>0$

い) $y=0$ は不適。

(ii)　$x^2-1>0$ のとき

あ) 軸 $\dfrac{y}{2\left(x^2-1\right)}>0$ ($\iff y>0$) なら，実数条件だけでよく，

$4y^2-4\left(x^2-1\right)\geqq 0 \iff y^2\geqq x^2-1$

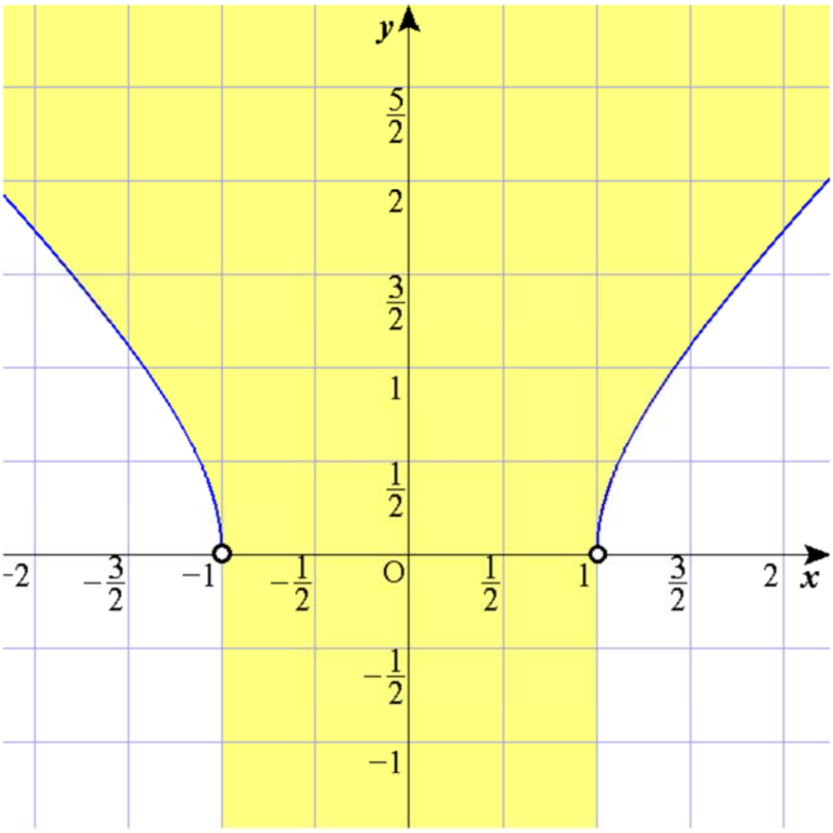
い) 軸 $\dfrac{y}{2\left(x^2-1\right)}\leqq 0$ ($\iff y\leqq 0$) なら，$y=f(a)$ のグラフが $(0,\ 1)$ を通ることから，正数解はもたない。

(iii) $x^2-1<0$ のとき

$y=f(a)$ のグラフは $(0,\ 1)$ を通ることから必ず正数解をもつ。

以上から，求める領域は

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=\pm 1} \text{ のとき } \boldsymbol{y>0} \\ \boldsymbol{x<-1,\ 1<x} \text{ のとき } \boldsymbol{y^2\geqq x^2-1} \\ \boldsymbol{-1<x<1} \text{ の領域全て} \end{cases}$$



（境界は双曲線上の $y>0$ の部分のみ含む）

【コメント】
案ずるよりも…ということで，軸の位置で場合分けという，あまりにも典型的な解法ですすめれば問題ありません。理系第1問らしいプチ発想型の問題ではありませんでしたが，定型問題で，受験生は安心したことでしょう。