文系第 3 問

l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件 (i), (ii)，(iii) で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。
(ii) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。
(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。　円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

【解答例】

l と x 軸のなす角を 2α，l と y 軸のなす角を 2β（$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$）とすると，$r_1 = \tan\alpha$, $r_2 = \tan\beta$

加法定理 $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\beta} = 1$ から $r_1 + r_2 = 1 - r_1 r_2$

$8r_1 + 9r_2 = k$ とおいて r_2 を消去すると，相加相乗平均の関係から

$k = 8(r_1 + 1) - 17 + \dfrac{18}{r_1 + 1} \geqq 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 18} - 17 = \mathbf{7}$

このとき $8(r_1 + 1) = \dfrac{18}{r_1 + 1}$ から $r_1 = \dfrac{1}{2}$, $r_2 = \dfrac{1}{3}$

l の傾きは $\tan 2\alpha = \dfrac{2r_1}{1 - {r_1}^2} = \dfrac{4}{3}$，よって l は $\boldsymbol{y = \dfrac{4}{3}x}$

【コメント】

点取り問題です。きちんと図を書いて，ミスしないように落ち着いて解きたいところです。いちおう動く図形なので，解答を見ると簡単そうでも，立式に当たっては，図形の動きをイメージする必要があります。