文系第２問

座標平面上の２点 $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件 (i) または (ii) をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A，P，B は同一直線上にある。

【解答例】

(i) について，A，B を通る 2 次関数を $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，

A を通ることから $1=a-b+c$，B を通ることから $-1=a+b+c$

これらから $b=-1,\ a+c=0$

よって 2 次関数は $y=ax^2-x-a\cdots$① とおけて，頂点の x 座標について $\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$

よって，$(i)\iff |a|\leqq\dfrac{1}{2},\ a\neq 0\cdots$②

そこで，②のとき，$|x|\leqq 1$ において①の通りうる領域を求めればよい。

① $\iff\ \left(x^2-1\right)a=x+y$ から，

あ) $x=\pm 1$ のとき，$x+y=0$ より $y=\mp 1$，これは点 A，B を表す。

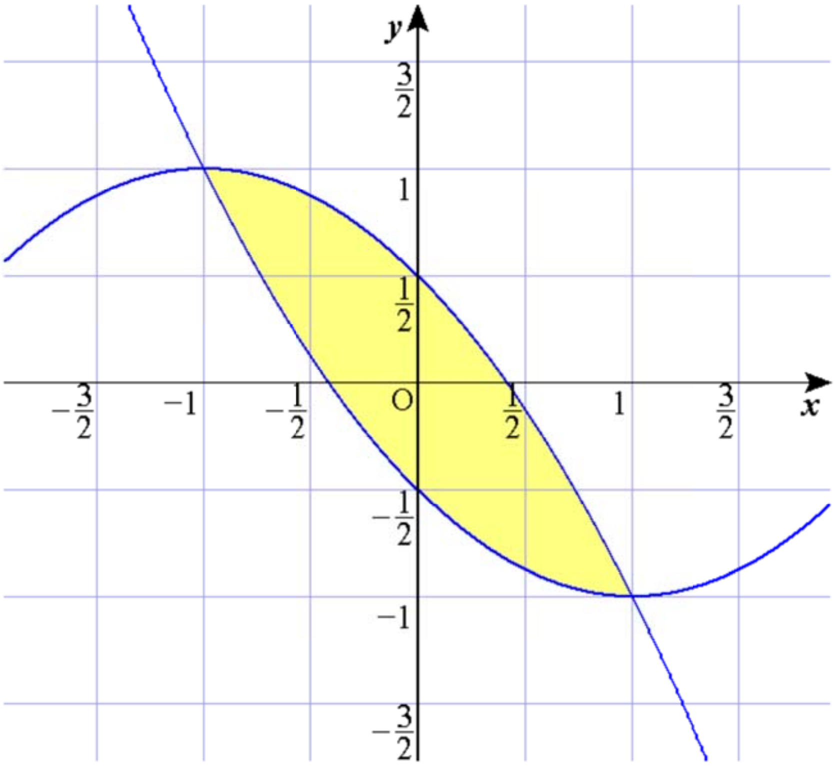
い) それ以外のとき，$a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$

$$\therefore\ ② \iff -\frac{1}{2}\leqq\frac{x+y}{1-x^2}\leqq\frac{1}{2}\ \text{かつ}\ y\neq -x$$

$$\iff y\geqq\frac{1}{2}(x-1)^2-1\ \text{かつ}\ y\leqq-\frac{1}{2}(x+1)^2+1\ \text{かつ}\ y\neq -x$$

(ii) については P の範囲は $y=-x\,(-1\leqq x\leqq 1)$

これらを合わせて，図から，面積は $2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{2}|1+1|^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$



（境界を含む）

【コメント】
領域の問題は，きちんと場合分けできるかどうかにかかっています。東大ではこのような場合分けは必ず出題されるので，しっかり対策して安定した得点源にしておきたいものです。