文系第 1 問

以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。
命題 B 整数 m，n，l が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。

【解答例】

命題 A　偽である。
$f(x)=\dfrac{x^3}{26}+100-x^2$ とおいて $f'(x)=\dfrac{3}{26}x\left(x-\dfrac{52}{3}\right)$ の $x>0$ における増減を調べると，$x>0$ における最小値は $f\left(\dfrac{52}{3}\right)$

そこで $\dfrac{52}{3}$ に一番近い整数 17 について調べてみると，
$f(17)=17^2(\dfrac{17}{26}-1)+100=-\dfrac{2601}{26}+100<0$ よって反例として $\boldsymbol{n=17}$ がある。

命題 B　真である。
$m+n=\dfrac{1-3l}{5}$，また $y=10nm+3ml+3nl$ とおくと $mn=\dfrac{5y-3l(1-3l)}{50}$
よって，m，n の実数条件から

$$(m-n)^2=(m+n)^2-4mn=\left(\frac{1-3l}{5}\right)^2-\frac{2}{5}\left\{y-\frac{3}{5}l(1-3l)\right\}\geqq 0$$

$$\iff 10y \leqq \frac{1}{10}\left(1-9l^2\right)$$

ここでもし $l=0$ であるとすると，$5n+5m+3l=1$ をみたす整数 m，n が存在しなくなるから，$l\neq 0$，従って $y<0$ である。（証明終）

【コメント】
命題と論証の形をとっていますが，内容は不等式の証明です。命題 B についてはいろいろな式変形が考えられますが，与えられた式の対称性がいいので，あれこれ考えるよりも上記のようにさっさと片付けてしまったほうがいいでしょう。