理系第５問

　r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{n+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

(1)

a_n を p で割った商を q_n として，

$a_n = q_np + b_n$，$a_{n+1} = q_{n+1}p + b_{n+1}$ とおけるので，

$a_{n+2} = (q_{n+1}p + b_{n+1})(q_np + b_n + 1)$

$= \{q_{n+1}q_np + b_{n+1}q_n + q_{n+1}(b_n+1)\}p + b_{n+1}(b_n+1)$

よって a_{n+2} を p で割った余り，すなわち b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りに等しい。(証明終)

(2)

x と y を p で割った余りが等しいことを，$x \equiv y$ と表す。(1) から，

$b_1 \equiv a_1 = 2$ より $\boldsymbol{b_1 = 2}$，$b_2 \equiv a_2 = 2+1 = 3$ より $\boldsymbol{b_2 = 3}$，$b_3 \equiv 3(2+1) = 9$ より $\boldsymbol{b_3 = 9}$，$b_4 \equiv 9(3+1) = 36$ より $\boldsymbol{b_4 = 2}$，$b_5 \equiv 2(9+1) = 20$ より $\boldsymbol{b_5 = 3}$

以下同様に，$\boldsymbol{b_6 = 9}$，$\boldsymbol{b_7 = 2}$，$\boldsymbol{b_8 = 3}$，$\boldsymbol{b_9 = 9}$，$\boldsymbol{b_{10} = 2}$

(3)

$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n+1)$，$b_{m+2} \equiv b_{m+1}(b_m+1)$ と $b_{n+1} = b_{m+1}$ から，

$0 = b_{n+2} - b_{m+2} \equiv b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+2} \equiv b_{m+1}$

$\equiv b_{n+1}b_n - b_{m+1}b_m$ $(\because b_{n+1} = b_{m+1})$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} = z$ (>0) とおけば，$z\,(b_n - b_m) \equiv 0$

z は $1,\ \cdots,\ p-1$ のいずれかであるから，p で割り切れることはない。

よって，$b_n - b_m$ が p で割り切れるのであり，従って $b_n = b_m$（証明終）

(4)

b_n は $0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$ のいずれかであるから，n が十分大きいときには，必ず $0,\ 1,\ \cdots,\ p-1$ のうちに複数回登場するものがある。その対を $b_{n+2} = b_{m+2}$ とすれば，(3) から，数列 $\{b_n\}$ は，b_n，b_{n+1}，b_{n+2} を繰り返す周期性があることがわかる。一方，題意より，b_2，b_3，$\cdots$ には 0 が現れないから，b_1 が 0 になることはない。よって a_1 は p で割り切れない。（証明終）

◆コメント◆

「余りが等しい」とと，「数自体が等しい」ことを区別するのがコツです。あとは，問題文の意図をつかめば自動的に答えが出ます。