

理系第3問

座標平面上で2つの不等式

$$y \geq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。 S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし、 y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

- (1) V_1 と V_2 を求めよ。
- (2) $\frac{V_2}{V_1}$ の値と1の大小を判定せよ。

【楕円の一部を2通りに回転させてできる立体の体積を比較】

- $a > 0, b > 0$ を定数とし、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上に定点 $A(a, 0)$ と、 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動く点

$P(a \cos t, b \sin t)$ をとる、そして、 x 軸、楕円の弧 AP 、線分 PO で囲まれる図形を x 軸、 y 軸の周りに回転してできる立体の体積をそれぞれ $V_1(t), V_2(t)$ とする、ただし O は原点を表す。

- (1) $V_1(t), V_2(t)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{tV_2(t)}{V_1(t)}$ を求めよ。

【回転方向による体積の比較】

- a, b を正の定数とし、2つの曲線 $C_1: y = ax^2, C_2: y = -ax^2 + 2abx$ によって囲まれる領域を S とする。 S を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_x 、 S を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V_y とする。このとき、比 $\frac{V_x}{V_y}$ を求めよ。(夏)

【楕円を回転させてできる立体の体積】

- a, b を正の数とする。楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた図形を直線 $x = 2a$ の周りに1回転させてできる立体の体積を V とおく。
- (1) V を a, b を用いて表せ。
 - (2) a, b が $a^2 + b^2 = 1$ という関係を満たしながら動くとき、 V の最大値を求めよ。(2)

【放物線を回転させてできる立体の体積】

- (1) $0 \leq a \leq 1$ とする。曲線 $y = x^2 - 2x$ と、 x 軸および2直線 $x = a, x = 2a$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 $V(a)$ を求めよ。
- (2) $0 \leq a \leq 1$ の範囲で $V(a)$ を最大にする a の値を求めよ。ただし $V(a)$ の最大値は求めなくてよい。(1)

◆コメント◆

一度はやったことのある問題かと思いますが、反復練習して計算速度を上げておいたほうがいいでしょう。