理系第１問

次の連立方程式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値を取るとき，x 軸と l のなす角 $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

【曲線が切り取る線分の長さの最大値と三角関数】

● 放物線 C: $y=x^2-2x\cos\theta+\cos 2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}$ （$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ ）と，直線 l: $y=x$ が２点で交わるとき，C が l から切り取る線分の長さの最大値を求めよ。（３）

【弦の長さの最大最小と三角関数】

● 半径 r の円に内接している二等辺三角形 ABC（AB=AC）の∠A の大きさが閉区間 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ を動くとき，この三角形の周の長さの最大値，最小値を求めよ。（２）

【回転する直線が切り取られる線分の長さの最大最小問題】

● 点(1, 5/4)を通る直線が，放物線 $y=x^2$ によって切り取られる線分の長さの最小値と，そのときの直線の方程式を求めよ。（３）

◆コメント◆

　本問は，弓形を横切る直線という設定が，新しいです。座標幾何の問題は，必ずノーマルな手順で解けます。上記のような問題で慣れておくと，早く解けるでしょう。