理系第６問

　n を正の整数とする。n の正の約数のうち，3 で割って 1 余るものの個数を $f(n)$，3 で割って 2 余るものの個数を $g(n)$ とする。

(1) $f(2800)$，$g(2800)$ を求めよ。
(2) $f(n) \geqq g(n)$ を示せ。
(3) $g(n) = 15$ であるとき，$f(n)$ がとりうる値を求めよ。

【解答例】

(1)
$2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7 = (3 \cdot 0 + 1)^4 (3 \cdot 1 + 2)^2 (3 \cdot 2 + 1)^1$
　$f(2800)$ について，3 で割って余りが 1 になる素因数は $7 = (3 \cdot 2 + 1)^1$ のみ。
　$(3 \cdot 0 + 1)^4$ と $(3 \cdot 1 + 2)^2$ についてはそれぞれの指数 (0，1，2，3，4) と (0，1，2）指数の合計が偶数乗になればよく，その組み合わせは (1，1) と (3，1) の二つに，偶数のみの組み合わせ $3 \times 2 = 6$ を合わせて 8 通り。これに $(3 \cdot 2 + 1)^1$ の 2 通りを考慮して，$\boldsymbol{f(2800) = 16}$
　$g(2800)$ について，
　$(3 \cdot 1 + 1)^4$ と $(3 \cdot 1 + 2)^2$ についてはそれぞれの指数 (0，1，2，3，4) と (0，1，2）の合計が奇数乗になればよく，(1，0)，(3，0)，(0，1)，(2，1)，（4，1)，（1，2)，（1，3）の合計 7 通り。これに $(3 \cdot 2 + 1)^1$ の 2 通りを考慮して，$\boldsymbol{f(2800) = 14}$
(2)
n の素因数のうち，3 で割って 2 余るものを a_1，a_2，$\cdots$，a_k，3 で割って 1 余るものを b_1，b_2，$\cdots$，b_l とする。
n を素因数分解したときの a_i の指数を I_i，b_i の指数を J_i として，
$n = {a_1}^{I1} {a_2}^{I2} \cdots {a_k}^{Ik} \cdot {b_1}^{J1} {b_2}^{J2} \cdots {a_l}^{Jl}$
ここで，a_i，$b\ i$ を含む集合を，
$A_1 = \{{a_1}^0,\ {a_1}^1,\ {a_1}^2,\ \cdots,\ {a_1}^{I1}\}$
$A_2 = \{{a_2}^0,\ {a_2}^1,\ {a_2}^2,\ \cdots,\ {a_2}^{I2}\}$
$\cdots\cdots$
$A_k = \{{b_k}^0,\ {a_k}^1,\ {a_k}^2,\ \cdots,\ {a_k}^{Ik}\}$，

$B_1 = \{{b_1}^0,\ {b_1}^1,\ {b_1}^2,\ \cdots,\ {b_1}^{J1\}}$
$B_2 = \{{b_2}^0,\ {b_2}^1,\ {b_2}^2,\ \cdots,\ {b_2}^{J2\}}$
$\cdots\cdots$
$B_l = \{{b_l}^0,\ {b_l}^1,\ {b_l}^2,\ \cdots,\ {b_l}^{Jl}\}$
とおくと，

各集合から1つずつ要素を取り出して積をとることでnの約数を作ることができる。
A_iから取り出した要素の指数をp_i，B_iから取り出した要素の指数をq_iとすると，
$f(n)$に関して，

・p_iはI_i以下の偶数と0のすべてをとれる。$\cdots$①

・加えて，p_iは奇数も，偶数個ならとることができる。$\cdots$①$'$

・q_iは0乗を含めJ_i+1個すべてとることができる。

$g(n)$に関して，

・p_iはI_i以下の奇数と0のすべてをとれる。$\cdots$②

・しかし，この場合，$p_1\cdots p_k$のすべてが0であってはならない。$\cdots$③

・加えて，p_iは0以外の偶数も，偶数個ならとることができる。$\cdots$②$'$

・q_iは0乗を含めJ_i+1個すべてとることができる。

I_iが奇数の場合と偶数の場合を考えると，①$'=$②$'$または①$'=$②$'+1$
また①と②の場合の数はたかだか1しか異ならない。
従って①$+$①$'\geqq$②$+$②$'$
さらに③の効果で$g(n)$は大きく減少しうる。
よって，$f(n)\geqq g(n)$
等号は，たとえば3で割って2余る素因数が一つだけで，それをa_1とすると，I_1が3以上の奇数のとき成り立つ。
(3)
3で割って2余る数を$(3k+2)$，3で割って1余る数を$(3l+2)$とおく。
$g(n)=15$のとき，nの約数として可能な数を，たとえば$a^{1,3,5}\times b^{0,1,2}$のように表記する。
また$a^{1,3,5}\times b^{0,1,2}$で表される$n$の約数の存在数を$[a^{1,3,5}\times b^{0,1,2}]$のように表す。

①　$g(n)=[(3k+2)^{1,3,5}\times(3l+1)^{0,1,2,3,4}]=15$のとき

　$n=(3k+2)^5(3l+1)^4$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2,4}(3l+1)^{0,1,2,3,4}]=15$

　$n=(3k+2)^6(3l+1)^4$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2,4,6}(3l+1)^{0,1,2,3,4}]=20$

②　$g(n)=[(3k+2)^{1,3,5,7,9}\times(3l+1)^{0,1,2}]=15$のとき

　$n=(3k+2)^9(3l+1)^2$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2,4,6,8}(3l+1)^{0,1,2}]=15$

　$n=(3k+2)^{10}(3l+1)^2$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2,4,6,8,10}(3l+1)^{0,1,2}]=18$

③　$g(n)=[(3k+2)^{1,3,\cdots,29}\times(3l+1)^0]=15$のとき

　$n=(3k+2)^{29}(3l+1)^0$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2,\cdots,28}(3l+1)^0]=15$

　$n=(3k+2)^{30}(3l+1)^0$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2,\cdots,30}(3l+1)^0]=16$

④　$g(n)=[(3k+2)^1\times(3l+1)^{0,2,4,\cdots,14}]=15$のとき

　$n=(3k+2)^1(3l+1)^{0,2,4,\cdots,14}$とすると$f(n)=[(3k+2)^0(3l+1)^{0,2,4,\cdots,14}]=15$

　$n=(3k+2)^2(3l+1)^{0,2,4,\cdots,14}$とすると$f(n)=[(3k+2)^{0,2}(3l+1)^{0,2,4,\cdots,14}]=30$

以上から，$f(n)=$ **15，16，18，20，30**

◆コメント◆

こちらも，意味がつかめなくなる可能性がある問題です。明らかに研究問題で，試験中に嵌まったら余裕で試験時間が終わります。完答は無理なので，採点も，どこまでわかっているかを見ようとします。こういうときの要領として，わかった範囲で何か書いておく，という感じになります。特に(2)は記号で厳密に論証しようとしても，場合分けが広がりすぎて試験時間内では破綻します。しかし，次の(3)で答えを出すときに，(2)で何か考察したことが役に立つようになっています。この場合は，素因数の 0 乗を加えていいかどうかを，臨機応変に判断します。$3k+2$ が入ってなければならない $g(x)$ では，$3k+2$ の 0 乗は不可ですが，$3k+2$ がなくてもいい $f(x)$ なら $3k+2$ の 0 乗もありです。完答は無理でも，理解度に応じて採点はできるという，超良問です。でもまあ，研究問題らしく，受験生が有効に活用するといいでしょう。

◆理系数学コメント◆

既に各方面でいわれているように，近年まれに見る難問セットでした。その一方で，東大らしさが炸裂していて，大人の娯楽としては極上のセットです。来年に向けて，こういう問題を研究することで，学力が確実に上がります。受験生に勉強のしがいもできたことでしょう。