
理系第5問

複素数平面上の原点を中心とする半径1の円を C とする。複素数 α と C 上の点 P(z) に対し，$w=(z-\alpha)^3$ とおく。P が C 上を動くときの点 Q(w) の軌跡を D とする。

(1) $\alpha=-3$ とし，w の偏角を θ とおく。P が C 上を動くとき，$\sin\theta$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) α が次の条件を満たすように動く。

条件: D は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ。

複素数平面上の点 R(α) が動きうる範囲の面積を求めよ。

【解答例】

(1)

$z-\alpha$ の偏角を φ とする。$\alpha=-3$ のとき，$u=z+3$ とおくと，その軌跡は3を中心とする半径1の円で，その偏角 φ の範囲は原点がこの円を見込む角なので，

$-\dfrac{1}{3}\leqq\sin\varphi\leqq\dfrac{1}{3}$

よって $\sin\theta=\sin 3\varphi$ のとりうる値の範囲は，3倍角の公式から $\boldsymbol{-\dfrac{23}{27}\leqq\theta\leqq\dfrac{23}{27}}$

(2)

(1) と同様に $u=z-\alpha$ とおく。偏角が ω であるような複素数の集合となる，原点を端とする半直線を $l(\omega)$ とすると，実軸の正の部分は $l(2k\pi)$，負の部分は $l((2k+1)\pi)$ (k は整数）とおける。

「中心の偏角が 3φ，半径1の円 P(w) が $l(2k\pi)$，$l((2k+1)\pi)$ の両方と交わる」

ことは，

「中心の偏角が φ，半径1の円 P(α) が $l\left(\dfrac{2k}{3}\pi\right)$，$l\left(\dfrac{(2k+1)}{3}\pi\right)$ の両方と交わる」

ことと同値である。

このような円の中心 $-\alpha$ の存在範囲を求めればよいが，それは円 P(α) の通る範囲と同じである。

α が $l\left(\dfrac{2k}{3}\pi\right)$ 上を動くとき P(α) の通る範囲は，

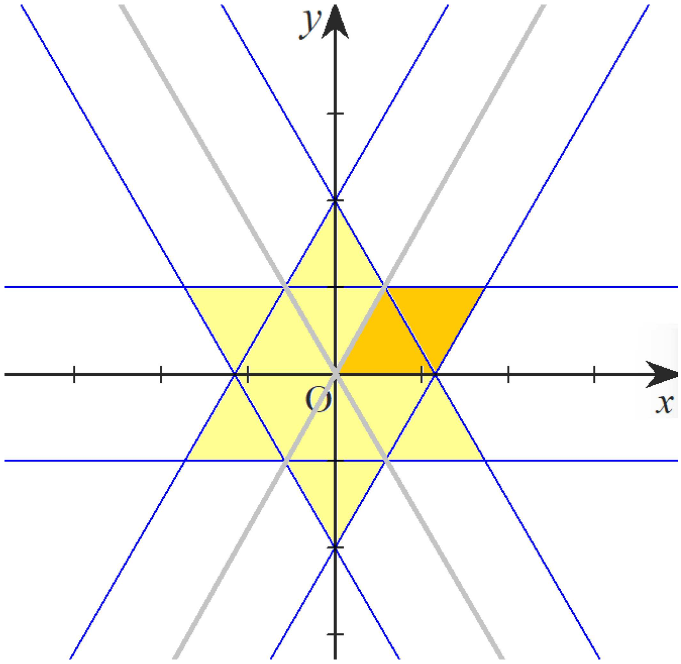
「$l\left(\dfrac{2k}{3}\pi\right)$ との距離が1の半直線の間」

である。

同様に α が $l\left(\dfrac{(2k+1)}{3}\pi\right)$ 上を動くとき P(α) の通る範囲は，

「$l\left(\dfrac{(2k+1)}{3}\pi\right)$ との距離が1の半直線の間」

である。この領域の共通部分を図示すると下図の着色部分となる。



このうちオレンジ色の菱形の面積を6倍して，求める面積は

$$\left(1 \times \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \times 1 \times 6 = \mathbf{4\sqrt{3}}$$

◆コメント◆

人によっては，何を言っているのかわからない問題でしょう。状況がつかめないので何をしていいかもわからないという，やや混乱を招く問題です。w の円ではなくて，α の円の領域を求める点が，一見わかりにくいです。実軸の正の部分と負の部分の両方，という表現もわかりにくいです。一瞬，原点の周辺にくるかもと思うかもしれませんが，同時に $+x$, $-x$ にまたがるのではなくて，w が動き回ってどちらにも行きうると捉えればいいでしょう。このあたりが，ある意味，数学的言語力です。ちょうどこの記事がアップされた日の日替わりアドバイスに掲載された，以下のようなオリジナルミジンコ問題で，言語による解釈に慣れていくといいでしょう。

【例題】

a, b, c を正の数として，xy 平面上に次の3つの円があります。

$$\begin{cases} C_1: \ (x-1)^2+(y-1)^2=a^2 \\ C_2: \ (x+8)^2+y^2=b^2 \\ C_3: \ x^2+(y+9)^2=c^2 \end{cases}$$

(1) 原点を中心とする半径 R $(R>0)$ の円 C で，C_1, C_2, C_3 のすべてと共有点をもつものが存在するような a, b, c の条件を求めてください。

(2) xyz 空間で，(1)の点 $(a,\ b,\ c)$ の存在範囲を D とします。原点を中心とする半径 r の球で $\overline{D}$ に含まれるようなものについて，r の最大値を求めてください。