文系第4問

k を実数とし,座標平面上の曲線 C を $y = x^3 - k.x$ で定める。C 上の2点P，Q に対する以下の条件(＊)を考える。

条件(＊)

原点O，点P，点Qは相異なり，CのO，P，Qにおける接線のうち，どの2本も交わり，そのなす角はすべて $\frac{\pi}{3}$ となる。

ただし，2直線のなす角は0以上 $\frac{\pi}{2}$ 以下の範囲で考えるものとする。

(1) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{6}$ とする。$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ を $\tan\theta$ を用いて表せ。

(2) 条件(＊)を満たすP,Qが存在するようなkの範囲を求めよ。

(3) k が(2)で定まる範囲にあるとする。P，Qが条件(＊)を満たすように動くとき，C のO，P，Qにおける接線によって囲まれる三角形の面積 S の最大値を M，最小値を m とおく。ただし,3本の接線が1点で交わるときは $S = 0$ とする。$M = 4m$ となる k の値を求めよ。

【解答例】

(1)

加法定理から $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\tan\theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\theta}}$

(2)

$f(x) = x^3 - kx$ として，$f'(x) = 3x^2 - k$

原点における接線の傾きを $\tan\theta$ とすると，$\tan\theta = -k$ 原点以外の接点をP，Qとして，それらの x 座標をそれぞれ p，q とすれば，

$$3p^2 - k = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-k + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}k}$$

$$3q^2 - k = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-k - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}k}$$

よって，

$$3p^2 = \frac{\sqrt{3}(1 + k^2)}{1 + \sqrt{3}k} \geqq 0 \text{ より } k \geqq -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdots ①$$

$$3q^2 = \frac{-\sqrt{3}(1 + k^2)}{1 - \sqrt{3}k} \geqq 0 \text{ より } k \geqq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots ②$$

まとめて，$\boldsymbol{k \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3)

O，P，Q における接線は

$L_O:\ y=-kx$

$L_P:\ y=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,k}x-2p^3$

$L_Q:\ y=\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,k}x-2p^3$

とおけて，

L_O と L_P の交点の x 座標は $x=\dfrac{2}{3}p$

L_O と L_Q の交点の x 座標は $x=\dfrac{2}{3}q$

だから，L_O の傾き $-k$ を考慮すると，PQ$=d$ として，

$$d^2=\left\{\frac{2}{3}(p-q)^2\right\}^2+\left\{\frac{2}{3}k(p-q)^2\right\}^2=\frac{9}{4}(1+k^2)(p-q)^2$$

①，②より，

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,(k^2+1)}{1+\sqrt{3}\,k}}=\pm\alpha\cdots③$$

$$q=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,(k^2+1)}{\sqrt{3}\,k-1}}=\pm\beta\ (\alpha,\ \beta>0)\cdots④$$

とおけて，

$|p-q|$ が最大になるのは，

$(p,\ q)=(+\alpha,\ -\beta),\ (-\alpha,\ +\beta)$ のとき，

$|p-q|$ が最小になるのは，

$(p,\ q)=(+\alpha,\ +\beta),\ (-\alpha,\ -\beta)$ のときなので，

d の最大値 L，最小値 l はそれぞれ，

$L^2=\dfrac{4}{9}(k^2+1)\{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\}$，

$l^2=\dfrac{4}{9}(k^2+1)\{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\}$

2 つの三角形の面積比は d^2 の比と同じだから，

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=4(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\iff 3\alpha^2+3\beta^2=10\alpha\beta$$

これに③④を用いて

$$\frac{\sqrt{3}\,(k^2+1)\cdot 2\sqrt{3}\,k}{3k^2-1}=10\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{3(k\ 2+1)^2}{3k-1}}\iff 6k=10\sqrt{\frac{1}{3}(3k^2-1)}$$

これより，$\boldsymbol{k=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}}$

◆コメント◆

今年の目玉問題ですが，この時点で試験時間が終了していた人が多いでしょう。後で解いて力をつけてくださいという，研究問題と見ていいでしょう。

◆文系数学全体コメント◆

計算処理に新しさがあり，基礎計算への習熟が問われます。特に第１問のような対称式には熟達しておかなければなりません。受験生にとっても，基礎計算に習熟するための，非常に良質な演習問題でした。