理系第3問

　座標空間内の原点を中心とする半径 5 の球面を S とする。S 上の相異なる 3 点 P, Q, R が次の条件を満たすように動く。

　　　条件: P, Q は xy 平面上にあり, 三角形 PQR の重心は G(2, 0, 1) である。

以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点 M の軌跡を xy 平面上に図示せよ。
(2) 線分 PQ が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

【解答例】

(1)

$\mathrm{M}(x,\ y,\ 0)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{MG}}=(2-x,\ -y,\ 1)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}=(6-2x,\ -2y,\ 3)$

これが S 上にあるから $4(3-x)^2+4y^2+9=25$

よって M の軌跡は $\boldsymbol{(x-3)^2+y^2=4}$

軌跡は次ページの図の赤い円で，P，Q が異なるから (5，0) を除く。

(2)

xy 平面で，$\mathrm{M}(3+2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ とおくと，PQ は M を通り $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直な直線

$(3+2\cos\theta)\{x-(3+2\cos\theta)\}+2\sin\theta(y-2\sin\theta)=0\cdots①$

この直線の通りうる範囲を求める。

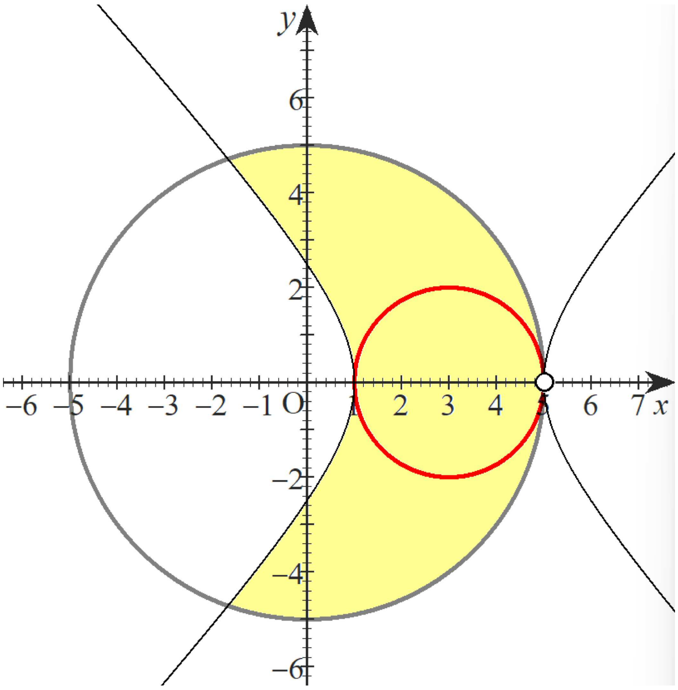
①から $(2x-12)\cos\theta+2y\sin\theta+3x-13=0$

三角関数の合成公式から

$\sqrt{(2x-12)^2+(2y)^2}\,\sin(\theta+\alpha)=13-3\ \therefore\ \sin(\theta+\alpha)=\dfrac{13-3x}{\sqrt{(2x-12)^2+(2y)^2}}$

よって $\dfrac{|13-3x|}{\sqrt{(2x-12)^2+(2y)^2}}\leqq 1$

これから求める領域は $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}\leqq 1$ のうち S 内の，次ページの図の黄色い部分で，(5，0) を除いた境界を含む。



◆コメント◆

（1）は大学入試問題としては，空間図形定番の基本処理でした。でも，市販の問題集にはあまり掲載されていない程度には，ハイレベルです。(2) も同様に，直線の通りうる領域の典型的な受験テクですが，線分 PQ をいくつか描いてみると，何をすればいいかがわかります。典型問題への習熟が問われますが，今年の問題としては第 2 問と同様点取りレベルでしょう。この二問を完答して，無事に合格，という感じになるかもしれません。