理系第2問

　n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x,\ y) | x,\ y \text{ は } 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる3点を選ぶ。ただし, どの3点も等確率で選ばれるものとする。選んだ3点が三角形の3頂点となる確率を p_n とする。

(1) p_5 を求めよ。
(2) m を2以上の整数とする。p_{2m} を求めよ。

【解答例】
(1)
3点が一直線上に並ぶときを K 通りとして,
(i) 3点が横一列に並ぶ場合：5通り
(ii) 3点が縦一列に並ぶ場合：${}_5\mathrm{C}_3 \times 3$ 通り
(iii) 傾き1の直線上に並ぶ場合：3通り
(iv) 傾き2の直線上に並ぶ場合：1通り
よって $K = (\mathrm{i}) + (\mathrm{ii}) + 2 \times \{(\mathrm{iii}) + (\mathrm{iv})\} = 43$ 通り
3点の選び方は全部で ${}_{15}\mathrm{C}_3 = 455$ 通り
よって求める確率は $p_5 = \dfrac{455 - K}{455} = \boldsymbol{\dfrac{412}{455}}$
(2)
3点が一直線上に並ぶときを K 通りとして,
(i) 3点が横一列に並ぶ場合：n 通り
(ii) 3点が縦一列に並ぶ場合：${}_n\mathrm{C}_3 \times 3$ 通り
(iii) 3点が傾き k $(1 \leqq k \leqq m)$ の直線上に並ぶ場合：$n - 2k$ 通り
$1 \leqq k \leqq m$ について，これらを合わせると $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(n-2k) = nm - m(m+1)$
よって，$K = (\mathrm{i}) + (\mathrm{ii}) + 2 \times (\mathrm{iii}) = n + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + 2 \cdot \{nm - m(m+1)\}$
p_{2m} を求めればいいので，$n = 2m$ として，
$K = 4m^3 - 4m^2 + 2m$
${}_{3n}\mathrm{C}_3 = \dfrac{n(3n-1)(3n^2)}{2} = 2m(6m-1)(3m-1)$
以上から，$p_{2m} = 1 - \dfrac{K}{{}_{3n}\mathrm{C}_3} = \boldsymbol{\dfrac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}}$

◆コメント◆

　理系的に，これが点取り問題でしょう。おそらく，この一問だけは完答した人が多かったのではないでしょうか。それでも m と n の関係や意味がわからなくて引っかかったかもしれません。