

---

## 理系第1問

- (1) 関数  $f(\theta) = \sin \theta - \theta + \frac{\theta^3}{6}$  の区間  $-1 \leq \theta \leq 1$  における最大値  $M$  および最小値  $m$  を求めよ。
- (2) (1) で定めた  $M$  に対し、次の不等式を示せ。

$$\frac{7}{8}\pi \leq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) dx \leq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

---

### 【解答例】

(1)

$$0 < \theta \text{ で } f'(\theta) = \cos \theta - 1 + \frac{\theta^2}{2}, f''(\theta) = -\sin \theta + \theta \geq 0$$

$$\text{また } f'(0) = f''(0) = 0$$

よって  $f'(\theta)$ ,  $f(\theta)$  は  $0 \leq \theta$  で増加で  $f(x) \geq 0$

$f(-\theta) = -f(\theta)$  から、 $y = f(\theta)$  のグラフは原点に関して対称なので

$$M = f(1) = \sin 1 - \frac{5}{6}, m = f(-1) = -\sin 1 + \frac{5}{6}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) dx &= \int_0^{2\pi} \{\sin(\cos x) \cos x - \cos(\cos x) \sin x\} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) dx = \int_0^{2\pi} \{\sin(\cos x) \cos x - \{\sin(\cos x)\}'\} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \{\sin(\cos x) \cos x dx - [\sin(\cos x)]_0^{2\pi}\} \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(\cos x) \cos x dx = I \text{ とおく。} \end{aligned}$$

ここで、 $\sin(\cos x) \cos x$  において、 $x = \pi - t$  と置き換えると

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\cos x) \cos x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin(\cos(\pi - t)) \cos(\pi - t) (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos t) \cos t dt$$

などから、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\cos x) \cos x dx &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(\cos x) \cos x dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(\cos x) \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x) \cos x dx = J \text{ とおくと, } I = 4J \end{aligned}$$

次に、 $f(\theta)$  において、 $\theta = \cos x$  とおくと、 $0 \leq \frac{\pi}{2}$  において  $0 \leq \cos x$  から、

$$0 \leq \sin(\cos x) - \cos x + \frac{\cos^3 x}{6} \leq M$$

$$\iff \cos x - \frac{\cos^3 x}{6} \leq \sin(\cos x) \leq M + \cos x - \frac{\cos^3 x}{6}$$

$$\therefore \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} \leq \sin(\cos x) \cos x \leq M \cos x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6}$$

よって、

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} \right) dx \leq I \leq 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( M \cos x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{6} \right) dx$$

積分を計算して、

$$\frac{7}{8}\pi \leq I \leq \frac{7}{8}\pi + 4M \quad (\text{証明終})$$

#### ◆コメント◆

$\cos^4 x$  などの積分計算は、入試直前の「日替わりワンポイントアドバイス」の「オリジナル猿問」で触れましたので省略します。 $f(x)$ をどう使うかが、ひらめきにくいです。最後まで残る  $\sin(\cos \theta) \cos \theta$  とどう関連付けるかがポイントです。

©東京風籃学院