(3)

O，P，Q における接線は

L_O : $y=-kx$

L_P : $y=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,k}x-2p^3$

L_Q : $y=\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,k}x-2p^3$

とおけて，

L_O と L_P の交点の x 座標は $x=\dfrac{2}{3}p$

L_O と L_Q の交点の x 座標は $x=\dfrac{2}{3}q$

だから，L_O の傾き $-k$ を考慮すると，PQ$=d$ として，

$$d^2=\left\{\frac{2}{3}(p-q)^2\right\}^2+\left\{\frac{2}{3}k(p-q)^2\right\}^2=\frac{9}{4}(1+k^2)(p-q)^2$$

①，②より，

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,(k^2+1)}{1+\sqrt{3}\,k}}=\pm\alpha\cdots③$$

$$q=\pm\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}\,(k^2+1)}{\sqrt{3}\,k-1}}=\pm\beta\ (\alpha,\ \beta>0)\cdots④$$

とおけて，

$|p-q|$ が最大になるのは，

$(p,\ q)=(+\alpha,\ -\beta),\ (-\alpha,\ +\beta)$ のとき，

$|p-q|$ が最小になるのは，

$(p,\ q)=(+\alpha,\ +\beta),\ (-\alpha,\ -\beta)$ のときなので，

d の最大値 L，最小値 l はそれぞれ，

$L^2=\dfrac{4}{9}(k^2+1)\{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\}$,

$l^2=\dfrac{4}{9}(k^2+1)\{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\}$

2 つの三角形の面積比は d^2 の比と同じだから，

$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=4(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)\iff 3\alpha^2+3\beta^2=10\alpha\beta$

これに③④を用いて

$$\frac{\sqrt{3}\,(k^2+1)\cdot 2\sqrt{3}\,k}{3k^2-1}=10\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{3(k\,2+1)^2}{3k-1}}\iff 6k=10\sqrt{\frac{1}{3}(3k^2-1)}$$

これより，$\boldsymbol{k=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}}$

◆コメント◆

今年の目玉問題ですが，この時点で試験時間が終了していた人が多いでしょう。後で解いて力をつけてくださいという，研究問題と見ていいでしょう。

◆文系数学全体コメント◆

　計算処理に新しさがあり，基礎計算への習熟が問われます。特に第１問のような対称式には熟達しておかなければなりません。受験生にとっても，基礎計算に習熟するための，非常に良質な演習問題でした。