文系第3問

$0 < a < 1$ とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{a}{8}(x-1)^2 + \frac{2}{a} - 3$$

と定める。　また，関数 $g(x)$ を次のように定める。整数 n に対し，

$2n \leqq x < 2n+1$ のとき $g(x) = x - 2n$

$2n+1 \leqq x < 2n+2$ のとき $g(x) = -x + 2n + 2$

とする。

(1) $x \geqq 4$ において $f(x) > g(x)$ を示せ。

(2) $\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ とする。座標平面上の $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの $x \geqq 0$ の範囲における共有点の個数を求めよ。

【解答例】

(1)

$4 \leqq x \leqq 5$ において，$g(x) = x - 4$ だから

$f(x) - g(x) = h(x)$ とおくと $h(x) = \frac{a}{8}\left\{x - \left(1 + \frac{4}{a}\right)\right\}^2 \geqq 0$

しかし $4 \leqq x \leqq 5$ では $1 + \frac{4}{a} > 5$ だから等号は成り立たない。

$x > 5$ では $x - 4 > g(x)$ なので，$f(x) \geqq x - 4 > g(x)$

よって $4 \leqq x$ において $f(x) > g(x)$(証明終)

(2)

$f(0) = \frac{a}{8} + \frac{2}{a} - 3 = J(a)$ とおく。

$\frac{a}{8} = \frac{2}{a}$ となるのは $a = 4$ のときなので，$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ では $J(a)$ は単調減少で，

$J\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{65}{16}$，$J\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{37}{12}$ から，$f(0) > 0$

$f(1) = \frac{2}{a} - 3 = J(a)$ とおくと，$J\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，$J\left(\frac{2}{3}\right) = 1$ から，

$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ で $0 < f(1) < 1$

したがって，$x = 1$ の両側に1つずつ交点がある。

$f(2) = \frac{a}{8} + \frac{2}{a} - 3 = J(a)$ について，$J\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{16}$，$J\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{12}$ から，$f(2) > 0$

$f(3) = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 3 = J(a)$ について，$J\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$，$J\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$ から，$f(3) > 0$

しかも $f(3) = 1$ となるのは $J(a) = 1$ から，$a = 4 - 2\sqrt{3}$ のときで，

$\frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3}$ のとき，$f(3) > 1$

$a = 4 - 2\sqrt{3}$ のとき，$f(3) = 1$

$4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3}$ のとき，$0 < f(3) < 1$

$a \geqq 4$ のときは (1) より $f(x) > g(x)$

以上より求める共有点の個数は,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 4-2\sqrt{3} \text{ のとき,} & 2\text{個} \\ a = 4-2\sqrt{3} \text{ のとき,} & 3\text{個} \\ 4-2\sqrt{3} < a < \dfrac{2}{3} \text{ のとき,} & 4\text{個} \end{cases}$$

◆コメント◆

$y=1,\ 0$ の間での交点を調べます。解いているうちに $g(x)$ の頂点で $f(x)$ の値を調べればいいとわかります。(1) では等号成立条件に注目します。文系数学としてはややレベルが高いですが, 丁寧に解いていけば必ず正解できる良問です。