

文系第2問

n を正の整数とする。座標平面上の $3n$ 個の点がなす集合

$$\{(x, y) \mid x, y \text{ は } 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる3点を選ぶ。ただし、どの3点も等確率で選ばれるものとする。選んだ3点が三角形の3頂点となる確率を p_n とする。

- (1) p_5 を求めよ。
- (2) m を2以上の整数とする。 p_{2m} を求めよ。

【解答例】

(1)

3点が一直線上に並ぶときを K 通りとして、

- (i) 3点が横一列に並ぶ場合：5通り
- (ii) 3点が縦一列に並ぶ場合： ${}_5C_3 \times 3$ 通り
- (iii) 傾き1の直線上に並ぶ場合：3通り
- (iv) 傾き2の直線上に並ぶ場合：1通り

よって $K = (i) + (ii) + 2 \times \{(iii) + (iv)\} = 43$ 通り

3点の選び方は全部で ${}_{15}C_3 = 455$ 通り

よって求める確率は $p_5 = \frac{455 - K}{455} = \frac{412}{455}$

(2)

3点が一直線上に並ぶときを K 通りとして、

- (i) 3点が横一列に並ぶ場合： n 通り
- (ii) 3点が縦一列に並ぶ場合： ${}_nC_3 \times 3$ 通り
- (iii) 3点が傾き k ($1 \leq k \leq m$) の直線上に並ぶ場合： $n - 2k$ 通り

$1 \leq k \leq m$ について、これらを合わせると $\sum_{k=1}^m (n - 2k) = nm - m(m + 1)$

よって、 $K = (i) + (ii) + 2 \times (iii) = n + 3 \cdot {}_nC_3 + 2 \cdot \{nm - m(m + 1)\}$

p_{2m} を求めればよいので、 $n = 2m$ として、

$$K = 4m^3 - 4m^2 + 2m$$
$${}_{3n}C_3 = \frac{n(3n-1)(3n^2)}{2} = 2m(6m-1)(3m-1)$$

$$\text{以上から、 } p_{2m} = 1 - \frac{K}{{}_{3n}C_3} = \frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$$

◆コメント◆

これも点取り問題ですが、 $2m$ とあるので、一瞬、あれ？と思う人がいるかもしれませんが。その意味を理解するために、丁寧に図を描いてみるだけです。