
文系第1問

正の実数 k および $\alpha < \beta$ となる実数 α, β が次の条件を満たすように動く。

条件

座標平面上の放物線 $C: y = k(x - \alpha)(\beta - x)$ の頂点は $(-3, 1)$ であり、 C は y 軸と $-2 \leq y \leq 0$ の範囲で交わる。

このとき、 C と x 軸で囲まれる図形の面積 S のとりうる値の範囲を求めよ。

【解答例】

$$f(x) = -k(x - \alpha)(x - \beta) \text{ として, } y \text{ 切片 } -2 \leq -k\alpha\beta \leq 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{頂点 } \frac{\alpha + \beta}{2} = -3 \dots \textcircled{2},$$

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{k(\beta - \alpha)^2}{4} = 1 \therefore (\beta - \alpha)^2 = \frac{4}{k} \dots \textcircled{3}$$

$$\text{よって, } S = \frac{k}{6} |\beta - \alpha|^3 = \frac{4}{3\sqrt{k}} (\because \textcircled{3}) \dots \textcircled{4}$$

ここで②③から、

$$\alpha\beta = \frac{1}{4} \{(\alpha + \beta)^2 - (\beta - \alpha)^2\} = 9 - \frac{1}{k} \therefore k\alpha\beta = 9k - 1$$

$$\text{よって①から } \frac{1}{9} \leq k \leq \frac{1}{3}, \textcircled{4} \text{ より, } \frac{4\sqrt{3}}{3} \leq S \leq 4$$

◆コメント◆

これが点取り問題ですが、文系数学にしては文字が多くて、ややレベルが高いです。最短で解くよう考えて、素早く済ませましょう。 $k\alpha\beta$ を要領よく導出することがポイントです。たとえばピンク字のような典型受験テクを自由に使えるように練習しておきましょう。