
理系第5問

座標空間内に3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり, D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに1回転させて得られる立体の体積を求めよ。

【解答例】

平面 $x = t$ と $\triangle ABC$ の交線を線分 PQ とする。

$P(t, 0, 1-t)$, $Q(t, 1-t, 0)$ のとき線分 PQ の中点は $M\left(t, \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$

また x 軸上の点 $(t, 0, 0)$ を R とすると,

$\frac{1}{3} \leq t \leq 1$ のとき

R と線分 PQ 上の点との最短距離は $RM = \frac{1-t}{\sqrt{2}}$, 最長距離は $RP = 1-t$

よって線分 PQ が通りうる部分の面積は $S_1 = \pi RP^2 - \pi RM^2 = \frac{1}{2}\pi(1-t^2)$

$0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ のとき

線分 BD と平面 $x = t$ の交点は $U(t, 1-2t, t)$ であり, $\triangle ABD$ と R の最短距離は

$RU = \sqrt{(1-2t)^2 + t^2}$, 最長距離は $RQ = 1-t$

よって線分 UQ が通りうる部分の面積は $S_2 = \pi RQ^2 - \pi RU^2 = \pi \{2t - 4t^2\}^2$

求める体積は $\int_{\frac{1}{3}}^1 S_1 dt + \int_0^{\frac{1}{3}} S_2 dt = \frac{\pi}{9}$

◆コメント◆

例年通り, 図をきちんと描いて考える問題です。切り口が $\triangle ABC$ の重心を通るときに場合が分かれることに気付くかどうかで, スピードが変わってきます。