理系第 4 問

　$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+4\sqrt{2}$ とおく。$0<t<4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y=f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_1 とする。

(1) 円 C_1 の中心の座標を $(c(t)\,,\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

(2) 実数 a は $0<a<f(3)$ を満たすとする。円 C_1 が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0<t<4$ の範囲にいくつあるか。

【解答例】

(1)

接点を $\mathrm{T}(t,\ f(t))$，円演の中心を $\mathrm{C}(c(t)\,,\ 0)$ とおいて，

T における放物線の接線の傾きが CT に直交することから，

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{f(t)}{t-c(t)}=-1 \iff c(t)=\frac{t^3}{4}-3t$$

$$\mathrm{CT}^2=\{r(t)\}^2=(t-c(t))^2+\{f(t)\}^2=\frac{1}{16}t^6-\frac{15}{8}t^4+12t^2+32$$

(2)

$C_1:\ (x-c(t))^2+y^2=\{r(t)\}^2$ が $\mathrm{A}(3,\ a)$ を通る

$$\iff (3-c(t))^2+a^2=\{r(t)\}^2 \iff a^2=-\frac{3}{8}t^4+\frac{3}{2}t^3+3t^2-18t+23$$

これを $g(t)$ として $g'(t)=-\dfrac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3)$

増減表（略）と $f(0)=23$，極小値 $g(2)=5$，極大値 $f(3)=\dfrac{49}{8}$，$f(4)=-1$ から，

交点は

$\sqrt{5}<a<\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ のとき 3 個

$a=\sqrt{5}$ のとき 2 個

$0<a<\sqrt{5}$ のとき 1 個

◆コメント◆

　放物線なので点取り問題かと思いきや，そこそこ計算量があります。このへんで，分数計算の重要性に気付いておくといいでしょう。