理系第 3 問

座標平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i) 最初に，P は点 (2，1) にいる。

(ii) ある時刻で P が点 $(a,\ b)$ にいるとき，その 1 秒後には P は

・確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点

・確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点

・確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

・確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y=-x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし，(1) については，結論のみを書けばよい。

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ。

(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 (2，1) にいる確率と，最初から n 秒後に P が点 $(-2,\ -1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が点 (2，1) にいる確率を求めよ。

【解答例】

(1)

A(2，1), B(−2，1), C(−2，−1), D(2，−1), E(1，2), F(−1，2), G(−1，−2), H(1，−2)

(2)

A からみた対称性を考えて，n 秒後に

A にいる確率 A_n，C にいる確率 C_n

B，D にいる確率それぞれ p_n，E，G にいる確率それぞれ q_n，F，H にいる確率それぞれ r_n について，

$A_n=\dfrac{2}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{3}q_{n-1}, C_n=\dfrac{2}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{3}q_{n-1}$ となるから，$A_n=C_n$

(3)

そこで $n \geqq 1$ のとき $A_n=C_n=u_n$ とおくと，

$u_n=\dfrac{2}{3}p_{n-1}+\dfrac{1}{3}q_{n-1}\cdots$①，$p_n=\dfrac{2}{3}u_{n-1}+\dfrac{1}{3}r_{n-1}\cdots$②

$q_n=\dfrac{1}{3}u_{n-1}+\dfrac{2}{3}r_{n-1}\cdots$③，$r_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{2}{3}q_{n-1}\cdots$④

$\left(p_1=\dfrac{1}{3},\ q_1=\dfrac{1}{6},\ u_1=r_1=0\right)$

②③から $p_n+q_n=u_{n-1}+r_{n-1}$，①④から $u_n+r_n=p_{n-1}+q_{n-1}$

よって n が偶数のとき

$p_n+q_n=p_{n-2}+q_{n-2}=\cdots=p_2+q_2=u_1+r_1=0$

$u_n+r_n=\cdots=p_1+q_1=\dfrac{1}{2}$

同様に n が奇数のとき

$p_n+q_n=\dfrac{1}{2}$, $u_n+r_n=0$

これらを用いて,

n が偶数のとき②③から $p_n=\dfrac{1}{3}u_{n-1}$, $q_n=-\dfrac{1}{3}u_{n-1}$

n が奇数のとき同様に $p_n=\dfrac{1}{3}u_{n-1}+\dfrac{1}{6}$, $q_n=-\dfrac{1}{3}u_{n-1}+\dfrac{1}{3}$

よって n が偶数のとき

①より, $u_n=\dfrac{1}{9}u_{n-2}+\dfrac{2}{9}$ $\therefore$ $u_n-\dfrac{1}{4}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\left(u_2-\dfrac{1}{4}\right)$

$u_2=p_1+q_1=\dfrac{1}{2}$ なので, $u_n=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1\right\}$

n が奇数のとき

①より, $u_n=\dfrac{2}{3}p_{n-1}=\dfrac{1}{9}u_{n-2}=\cdots=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}u_1=0$

以上から求める確率は

n が偶数のとき $\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1\right\}}$

n が奇数のとき $\boldsymbol{0}$

◆コメント◆

漸化式の中の n や $n-1$ が奇数か偶数かをたえず気にしなければならないので, 注意力が必要です。草稿量が多くなるので, 時間がかかります。後回しでもいいでしょう。