理系第 2 問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+x^2}dt\ (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ

(2) (1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，$0.69<\log_2<0.7$ であることを用いてよい。

【解答例】

(1)

$$f(x)=-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt+\int_x^1 \frac{t}{1+t^2}dt+x\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}+x\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right)\right]_0^x+\left[\frac{1}{2}\log\left(1+t^2\right)\right]_x^1+x\left[\theta\right]_0^{\theta_1}-x\left[\theta\right]_{\theta_1}^{\frac{\pi}{4}}\quad (x=\tan\theta_1)$$

$$=-\log\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\log 2+2x\theta_1-\frac{\pi}{4}x$$

$$\therefore\ f'(x)=-\frac{2x}{1+x^2}+2\theta_1+2x\cos^2\theta_1-\frac{\pi}{4}$$

$x=\tan\alpha$ のとき $\theta_1=\alpha$ だから，

$f'(\tan\alpha)=2\alpha-\frac{\pi}{4}=0\ \therefore\ \alpha=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

(2)

$1=\tan\frac{\pi}{4}=\dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ より $\tan\frac{\pi}{8}=\boldsymbol{-1+\sqrt{2}}$

(3)

$f'(0)=-\frac{\pi}{4}<0,\ f'(1)=-1+\frac{\pi}{2}+1-\frac{\pi}{4}>0$

よって最大値は $f(0)$，$f(1)$ のいずれかで，$f(0)=\frac{1}{2}\log 2,\ f(1)=-\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2}\log 2 \fallingdotseq 0.35,\ \frac{\pi}{4}\fallingdotseq 0.785$ だから，最大値は $f(1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2}$

最小値は $f\left(\tan\frac{\pi}{8}\right)=\boldsymbol{-\log\left(4-2\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\log 2}$

◆コメント◆

置換積分を素早く使いこなす，比較的簡単な計算問題でした。積分自体に例年のような難しさはなく，定型問題を素早く解く習熟度が求められます。