理系第 1 問

座標空間内の点 A(0, $-1$, 1) をとる。$xy$ 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i) P は原点 O と異なる。

(ii) $\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を $xy$ 平面上に図示せよ。

---

【解答例】

条件 (ii) から

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,\ y,\ z)$ のなす角 $\theta$ について

$-1 \leqq \cos\theta \leqq -\dfrac{1}{2} \iff -1 \leqq \dfrac{-y+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqq -\dfrac{1}{2} \cdots ①$

条件 (iii) から

$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = (0,\ 1,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x,\ y+1,\ z-1)$ のなす角 $\varphi$ について

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\varphi \leqq 1 \iff \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{y+z+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}} \leqq 1 \cdots ②$

①②で $z=0$ とおけば $-1 \leqq \dfrac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\dfrac{1}{2} \cdots ③$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \leqq 1 \cdots ④$

③から $\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geqq y \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

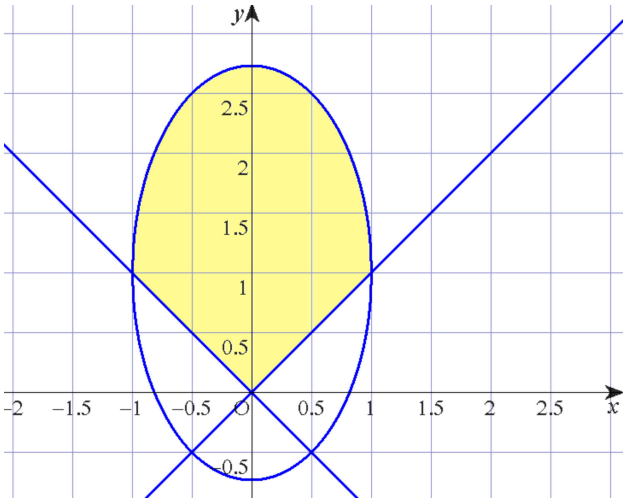
$\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \geqq y\,(\geqq 0) \iff 2x^2+y^2 \geqq 0$ は常に成り立つ。

$y \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2+y^2} \iff y^2 \geqq x^2 \iff |y| \geqq |x|\ (y \geqq 0) \cdots ⑤$

④から $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \iff x^2 + \dfrac{(y-1)^2}{3} \leqq 1 \cdots ⑥$

$\dfrac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \leqq 1 \iff 2x^2+y^2 \geqq 0$ は常に成り立つ。

以上から，⑤かつ⑥が求める領域となる。




（境界を含む）

◆コメント◆

何も考えず機械的に解ける，点取り問題でした。定型パターンには習熟しておくといいでしょう。