文系第 4 問

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

【解答例】

頂点を P_1，P_2，・・・，P_n とする。半円内で 4 点を選び，O を含まない四角形を作ることを考える。$i=\dfrac{n+1}{2}$ として，

P_1 を必ず選び，残りの三点を P_2・・・P_i から選ぶ選び方は，${}_{i-1}\mathrm{C}_3$ 通り

同様に P_2 を必ず選ぶ場合を考え，これを P_n まで繰り返すと重複なく中心を含まない三角形を数えることができて，その数は，$N_1=n\times{}_{i-1}\mathrm{C}_3=\dfrac{n}{6}(i-1)(i-2)(i-3)$

全ての三角形の選び方は $N_2={}_n\mathrm{C}_4$ 通り

よって中心を含まない確率は $q_n=\dfrac{N_1}{N_2}=\dfrac{n-5}{2\,(n-2)}$

中心を含む確率は $p_n=1-q_n=\boldsymbol{\dfrac{n+1}{2n-4}}$

◆コメント◆

点に P_1 のように記号をつける場合，半円内の頂点がずれるおそれがありますので注意力が必要です。

◆文系数学全体コメント◆

今年は特に目を引くような目玉問題がなく，第 2 問が地味ながら解きにくい，差のつく問題でした。こういう年は，計算力で片付く問題を先に解き，確実に得点するといいでしょう。