
文系第2問

以下の問い合わせに答えよ。必要ならば、 $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数を求めよ。
 - (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数を求めよ。
-

【解答例】

(1)

両辺の常用対数をとって $n > \frac{19}{1 - \log 2}$

右辺は $\log 2 = 0.3$ のとき 27.1, $\log 2 = 0.31$ のとき 27.5

よって求める n は **$n = 28$**

(2)

$m = 27$ となる可能性があるか考察する。

$$K = 5^{27} + 4^{27} = 5^{27} + (5 \times 0.8)^{27} = 5^{27}(1 + 0.8^{27})$$

$$\text{ここで } \log 0.8^{27} = 27(3 \log 2 - 1) < 27(3 \times 0.31 - 1) = -1.89 < -1$$

$$\therefore 0.8^{27} < 10^{-1} = 0.1 \text{ すると } K = 5^{27}(1 + 0.8^{27}) < 5^{27}(1 + 0.1) = 5^{27} \times 1.1$$

$$\log K = 27(1 - \log 2) + \log 1.1 < 27 \times (1 - 0.3) + \log 1.1 = 18.9 + \log 1.1$$

$y = \log x$ のグラフを考えると、 $x = 1$ での接線の傾きが 1 で、 $x > 1$ では傾きが 1 より小なので、

$$\log 1.1 = \log(1 + 0.1) < 0.1 \text{ であり、従って } \log K = 18.9 + \log 1.1 < 19$$

よって $m = 27$ は求める値ではない。従って求める値は(1)で示されたように、 **$m = 28$**

◆コメント◆

4^m の桁数が小さいことに気付かないと方針が立ちません。数字がけっこうぎりぎりに設定されているので、大雑把すぎる見積もりをすると最後の最後に崩壊します。なので工夫が必要で、その分時間がかかります。