文系第 1 問

座標平面上で，放物線 $C : y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 P($cos\theta$, $\sin\theta$)，Q($-\cos\theta$, $\sin\theta$) を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている。ただし，$0° < \theta < 90°$ とする。

(1) a, b, c を $s = \sin\theta$ を用いて表せ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。

【解答例】

(1)

対称性から $b = 0$ で放物線は $y = ax^2 + c \cdots$ ① とおけて，$y' = 2ax$

P における放物線の接線の傾き $2a\cos\theta$ が円の接線でもあるので半径 OP に直交するから

$2a\cos\theta \cdot \tan\theta = -1 \therefore a = -\dfrac{1}{2\sin\theta}$

これと P が①を通ることから $c = \dfrac{\sin^2\theta + 1}{2\sin\theta}$

よって $\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2s}}$, $\boldsymbol{c = \dfrac{s^2+1}{2s}}$

(2)

放物線 $y = \dfrac{1}{2s}x^2 + \dfrac{s^2+1}{2s}$ で $t = 0$ とおいて x 軸との交点の x 座標は

$x = \pm\sqrt{s^2+1} \therefore A = \dfrac{1}{6}\left|-\dfrac{1}{2s}\right|(2\sqrt{s^2+1})^3 = \dfrac{2}{3}\left(s + \dfrac{1}{s}\right)\sqrt{s^2+1}$

$A^2 = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{(s^2+1)^3}{s^2}$

ここで $t = s^2$ とおくと，$A^2 = \dfrac{4}{9}\dfrac{(t+1)^3}{t}$, $A^2 - 3 = \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{4t^3 + 12t^2 - 15t + 4}{4t}$

$f(t) = 4t^3 + 12t^2 - 15t + 4$ とおくと $f'(t) = (6t-3)(2t+5)$

$0 \leqq t \leqq 1$ における増減を調べて $f(t) \geqq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ よって $A \geqq \sqrt{3}$ (証明終)

◆コメント◆

例年のように点取り問題です。基本的な計算問題なので，ウォーミングアップになるでしょう。