理系第 6 問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，…，X_N を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・n 回目のコイン投げで表が出た場合,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N=8$ とする。X_8 が O にある確率を求めよ。

(2) $N=200$ とする。X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく。ただし $0 \leqq r \leqq 200$ である。p_r を求めよ。また p_r が最大となる r の値を求めよ。

【解答例】

(1)

裏を $\boxed{}$ で表す。ただし最初の進行方向 (→) はコインを投げる前から決まっている。

(i) 裏が 2 回出るとき

$\boxed{\rightarrow}$ (A) $\boxed{\nwarrow}$ (B) $\boxed{\swarrow}$ (C)

(A)(B)(C) に 2 個ずつ表が入る形の 1 通り

(ii) 裏が 5 回出るとき

$\boxed{\rightarrow}$ (A) $\boxed{\nwarrow}$ (B) $\boxed{\swarrow}$ (C) $\boxed{\rightarrow}$ (A) $\boxed{\nwarrow}$ (B) $\boxed{\swarrow}$ (C)

3 個の表を (A)(B)(C) に 1 個ずつ振り分ける方法は $2\times2\times2=8$ 通り。

(iii) 全回裏が出るとき

1 通り

以上合わせて 10 通りなので確率は $\mathbf{10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{8}}$

(2)

起こりうるのは r が 3 の倍数のときだけである。

$r=3k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ 66)$ とおくと，裏は $200-3k$ 回出て，上記の (A)，(B)，(C) はそれぞれ $\dfrac{201-3k}{3}=67-k$ 個できる。

$67-k$ 個の (A) に計 k 個の表を振り分ける方法は，${}_{67-k}\mathrm{H}_k={}_{66}\mathrm{C}_k$ 通り。

(B)(C) についても同じだから，表の並べ方は全部で $\left\{{}_{66}\mathrm{C}_k\right\}^3$ 通り。

よって $p_{3k}=\dfrac{\left\{{}_{66}\mathrm{C}_k\right\}^3}{2^{200}}$

以上から

r が 3 の倍数のとき $p_r=\dfrac{\left\{{}_{66}\mathrm{C}_{\frac{r}{3}}\right\}^3}{2^{200}}$

r が 3 の倍数でないとき $p_r=\mathbf{0}$

p_r が最大になるのは，$f(k)={}_{66}\mathrm{C}_k$ が最大になるときで，

$\dfrac{f(k+1)}{f(k)}>1 \iff k<32.5$ だから $\cdots f(32)<f(33)>f(34)\cdots$

よって求める r は $33\times 3=\mathbf{99}$

◆コメント◆

東大ではわりとありがちな重複組み合わせの問題です。むしろ，最初に重複組み合わせを疑って，強引に解法を誘導したほうがいいでしょう。

◆理系数学全体コメント◆

計算が重いものや，その場で新しい処理を考えさせるものもあり，単純なステレオタイプだけでは押し通せない良問セットでした。とはいっても，どこかで見た感じの問題であり，親しみを感じさせるとともに，受験生に，もっと練習しておけばよかったと思わせる内容でした。傾向に沿ってきちんと勉強すればするだけ点が取れるよう設計されていて，挑戦し甲斐のある東大数学は，健在です。