理系第 5 問

座標空間内の点 A(0, 0, 2) と点 B(1, 0, 1) を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする。S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が PQ$=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

【解答例】

xz 平面内で P$(p,\ 2-p)$ $(0 \leqq p \leqq 1)$，Q$(q,\ 0)$ とおくと，OQ$=2$ より $q = p \pm \sqrt{4p-p^2}$

よって M は $\left(\dfrac{2p \pm \sqrt{4p-p^2}}{2},\ \dfrac{2-p}{2}\right)$

$\dfrac{2-p}{2} = k$ とおくと，M は $\left(2(1-k) \pm \sqrt{1-k^2},\ k\right)$

平面 $z=k$ 内での M の動きに注目すると，M は半径 $2(1-k)+\sqrt{1-k^2}$ の円と半径 $\left|2(1-k)-\sqrt{1-k^2}\right|$ の円で挟まれたドーナツ形の領域を動く。その面積は

$S = \pi\left\{2(1-k)+\sqrt{1-k^2}\right\} - \pi\left\{2(1-k)+\sqrt{1-k^2}\right\}^2 = 8\pi(1-k)\sqrt{1-k^2}$

よって求める体積は $V = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} S\,dk = 8\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin t)\cos^2 t\,dt = \boldsymbol{\frac{4\pi^2}{3} - 2\sqrt{3}\,\pi}$

◆コメント◆

空洞ができるときとできないときで場合分けをしようとして飛んだ人が多かったのではないでしょうか。M は大きな円に内接しながら動く小さな円を描きますが，実際はほとんどの k で，大円の中心付近に小円は近づくことができません。この絵柄を見抜けたかどうかで差がつくでしょう。