理系第 4 問

座標平面上の曲線 $C : y = x^3 - x$ を考える。

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ。

(i) 点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する。

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(ii) 点 P を通る直線 l で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 l と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する。

【解答例】

(1)

C の接線のうち原点以外で接するものを動かすと全平面を通る。そこで原点以外の P から C に，原点以外で接する適当な接線 m をひくと，m を P を中心にわずかに回転させることで C と三点で交わるようにすることができる。また P が原点のときはたとえば直線 $y = 0$ が C と 3 点で交わる。よって題意の直線 l が存在する。

(2)

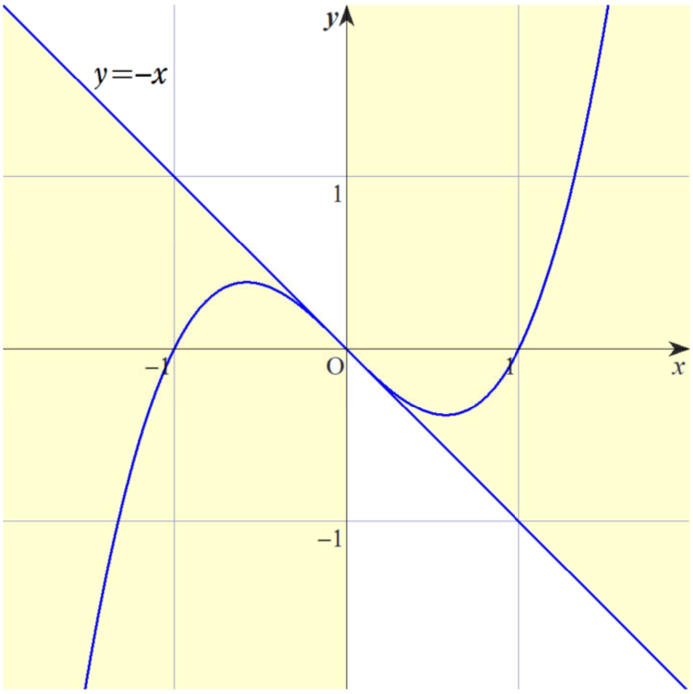
C 上の 3 点 P，Q，R が一直線 l 上にあり，それぞれの x 座標が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるとする。

C と l で囲まれた 2 つの領域の面積が等しい

$$\iff \int_{\alpha}^{\gamma} \left(x^3 - x\right) dx = 0 \iff \left(\gamma^2 - \alpha^2\right)\left(\gamma^2 + \alpha^2 - 2\right) = 0$$

よって $|\gamma| = |\alpha| \cdots$ ① または $\gamma^2 + \alpha^2 = 2 \cdots$ ②

①のときは P，R が原点に関して対称，②のときは円 $x^2 + y^2 = 2$ と C の交点上に P，R があることからやはり P，R が原点に関して対称だから，l は原点を通り，Q は原点となる。そこで原点を通り C と 3 点で交わる直線の動きうる範囲を求めればよく，以下のようになる。



（境界はふくまない）

◆コメント◆

いわゆるロジックの問題です。怒涛の数式を使いまくっても，意味内容は伝わりません。このあたりが東大的な問題ですが，スマートかつ数学的に素早く解決しましょう。