理系第 3 問

O を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の 2 点 S$(x_1,\ y_1)$，T$(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \text{ または } |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式 $0 \leqq x \leqq 3$, $0 \leqq y \leqq 3$ が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 A(3, 0)，B(3, 3) を考える。さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる。

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある。

(ii) 点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている。

点 P の x 座標を a とする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ。

(iii) 点 Q は領域 D の点である。

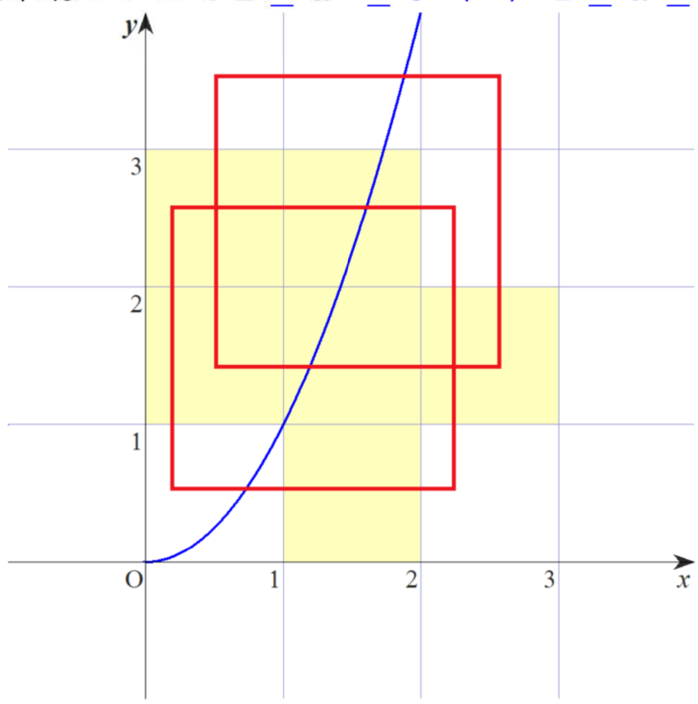
(iv) 点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている。

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の $f(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

【解答例】

(1)

P が図の着色部分にあればいいので $\boldsymbol{1 \leqq a^2 \leqq 3 \iff 1 \leqq a \leqq \sqrt{3}}$



(2)

P を中心とする 1 辺が 2 の図の正方形 G が着色部からはみ出る部分の面積 U は,

(i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$U=\left\{1-\left(a^2-1\right)\right\}\{1-(a-1)\}+\{(a+1)-2\}\left\{1-\left(a^2-1\right)\right\}$

$+\{(a+1)-2\}\left\{\left(a^2+1\right)-2\right\}=a^3-2a^2-a+3$

(ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$U=\left\{\left(a^2+1\right)-3\right\}\times 2+\{(a+1)-2\}\times 1=2a^2+a-5$

着色部にある正方形内の面積 V は

(i) のとき $V=4-U=4-\left(a^3-2a^2-a+3\right)$

(ii) のとき $V=4-U=4-\left(2a^2+a-5\right)$

よって着色部分で P から「十分離れている」部分の面積 $f(a)$ は

$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき $f(a)=6-V=\boldsymbol{a^3-2a^2-a+5}$

$\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき $f(a)=6-V=\boldsymbol{2a^2+a-3}$

(3)

(i) のとき $f'(a)=3a^2-4a-1$

(ii) のとき $f'(a)=4a+1$

グラフ (略) から $f(a)$ を最小にする a は $\boldsymbol{a=\sqrt{2}}$

◆コメント◆

例によって，丁寧に絵柄を描きましょう，という問題です。そうすると，単純計算で答えが出てきます。これも東大で頻出のスタイルです。