理系第 2 問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$a_1=1,\ a_{n+1}={a_n}^2+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ。

(2) $k,\ n$ を正の整数とする。a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を $k,\ n$ を用いて表せ。

(3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ。

【解答例】

(1)

5 で割った余りが j であるような数を $<j>$ と書くことにする。

$a_1=1=<1>,\ a_2=2=<2>,\ a_3=5=<0>$

ここで a_{3k} が 5 で割り切れると仮定して $a_{3k}=5m$ とおくと

$a_{3k+1}=25m^2+1=<1>$

$a_{3k+2}=<1>^2+1=<2>$

$a_{3k+3}=<2>^2+1=<0>$

よって帰納法により，正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となる。

(2)

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=5,\ a_4=26\cdots,\ a_k\qquad\cdots$①

において，a_n を a_k で割った余りは 1, 2, 5, 26, $\cdots$, 0 となる。

そこで a_k で割った余りが j であるような数を $<j>$ と書くことにすると，

$a_{k+1}={a_k}^2+1=<0>^2+1=<1>$

$a_{k+2}=<1>^2+1=<2>$

$a_{k+3}=<2>^2+1=<5>$

$\vdots$

というように，①と全く同じ規則によって a_n を a_k で割った余りが単調に増加していき，$a_{k+k}=<0>$ となることがわかる。従って a_{k+1} から a_{2k-1} までは $<0>$ は出現しない。これは a_{2k+1} 以降も続き，$k=1,\ 2$ などでも成り立つから，求める必要十分条件は $\boldsymbol{n=mk}$ **（m は正の整数）**

(3)

$8091=8088+3=2022\times 4+3$

よって a_{8083} は a_{2022} で割り切れ，a_{8091} を a_{2022} で割った余りは①より 5 となり，

${a_{8091}}^2$ を a_{2022} で割った余りは 25。しかし a_{2022} は 25 の倍数ではないから，${a_{8091}}^2$ と a_{2022} の最大公約数は **5**

◆コメント◆

必要十分条件とあるので，a_{k+1} から a_{2k-1} までは a_k で割った余りが 0 にならないことを言わないといけません。とりあえず周期性の利用を考えればいいので，上のような $< j >$ みたいな書き方を工夫すると速いでしょう。