文系第 4 問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 $k$ に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを $N$ 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0$，$\mathrm{X}_1$，$\mathrm{X}_2$，$\cdots$，$\mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める。

(i) $\mathrm{X}_0$ は O にある。

(ii) $n$ を 1 以上 $N$ 以下の整数とする。$\mathrm{X}_{n-1}$ が定まったとし，$\mathrm{X}_n$ を次のように定める。

・$n$ 回目のコイン投げで表が出た場合,

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$$

により $\mathrm{X}_n$ を定める。ただし，$k$ は 1 回目から $n$ 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・$n$ 回目のコイン投げで裏が出た場合，$\mathrm{X}_n$ を $\mathrm{X}_{n-1}$ と定める。

(1) $N=5$ とする。$\mathrm{X}_5$ が O にある確率を求めよ。

(2) $N=98$ とする。$\mathrm{X}_{98}$ が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

---

【解答例】

(1)

裏を 0，表を 1 であらわす。

全回裏が出るか，$[0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$ の場合のみ。

確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 2=\frac{1}{16}$

(2)

裏が出るたびに進行方向が $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_0}$ へと変わり，以降再び裏が出るまで同じ方向へ進み続ける。ただし最初の $\overrightarrow{v_0}$ はコインを投げる前に決まっている。

$\boxed{\overrightarrow{v_0}}$ (A) $\boxed{\overrightarrow{v_1}}$ (B) $\boxed{\overrightarrow{v_2}}$ (C) $\boxed{\overrightarrow{v_0}}$ (A) $\boxed{\overrightarrow{v_1}}$ (B) $\boxed{\overrightarrow{v_2}}$ (C) $\boxed{\overrightarrow{v_0}}$ (A) $\boxed{\overrightarrow{v_1}}$ (B) $\boxed{\overrightarrow{v_2}}$ (C)

3 か所ある隙間 (A) に 30 回の表を振り分けるわけ方は ${}_{31}H_2=16\times 31$

隙間 (B)，(C) についても同じだから振り分け方は全部で $(16\times 31)^3$ 通り

求める確率は $(16\times 31)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{98}$

◆コメント◆

わりと地獄入っていますが，重複組み合わせは東大では頻出のほうなので，まずその解

法を試してみるのはいいことです。受験生側の対策が手薄なのにけっこう発展性があって面白い単元なので，集中的に勉強しておくといいでしょう。

◆文系数学全体コメント◆
良問揃いですが，文系数学なのに数学的内容が濃すぎて，同時に難問揃いになっています。こういう年もありますから，従来通り，おさえとして，英語や世界史などの文系科目はしっかり固めておくといいでしょう。