文系第 2 問

$y=x^3-x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 P$(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を l とする。C と l は相異なる 3 点で交わるとする。

(1) α のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C と l の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を $\beta,\ \gamma$ とする。ただし $\beta<\gamma$ とする。$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となることを示せ。

(3) (2) の $\beta,\ \gamma$ を用いて，

$$u=4\alpha^3+\frac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$$

と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。

【解答例】

(1)

点 P における法線 $y=-\dfrac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)$ と 3 次曲線の式から

$f(x)=x^3-x+\dfrac{1}{3\alpha^2-1}x-\dfrac{\alpha}{3\alpha^2-1}-\alpha^3+\alpha=0\cdots$①

①は $(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x+\alpha^2-\dfrac{3\alpha^2-2}{3\alpha^2-1}\right)=0$

なので $g(x)=x^2+\alpha x+\alpha^2-\dfrac{3\alpha^2-2}{3\alpha^2-1}=0$ が α 以外の 2 つの異なる実数解をもてばよい。

$D>0\iff\dfrac{9\alpha^4-15\alpha^2-8}{3\alpha^2-1}<0$ 分子は判別式が負なので常に正。

$\therefore\ 3\alpha^2-1<0\iff \boldsymbol{-\sqrt{\frac{1}{3}}<\alpha<\sqrt{\frac{1}{3}}}\cdots$①

また $g(\alpha)=\dfrac{9\alpha^4-6\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}$ において分子は常に正だから①のとき $g(\alpha)\neq 0$ は満たされている。

(2)

①より，$\beta+\gamma=-\alpha,\ \beta\gamma=\alpha^2-\dfrac{3\alpha^2-2}{3\alpha^2-1}$

そこで，$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1=-\dfrac{1}{3\alpha^2-1}\neq 0$

このとき $u=4\alpha^3-3\alpha^2+1$

増減表 (略) をつくって，$\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{9}<u\leqq 1}$

◆コメント◆

文系数学としては計算量が多いですが，このくらいが，だいたい東大の標準的な感じといえるでしょう。工夫は要りませんが，計算のスピードと正確さで差がつく問題です。