文系第 1 問

$a,\, b$ を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく。C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 $l_1,\, l_2$ を持つとする。ただし，C と l_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と l_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする。

(1) b を a で表せ。また a の値はすべての実数をとりうることを示せ。

(2) $i=1,\, 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で l_i と接するものと定める。D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ。

【解答例】

(1)

$l_1,\, l_2$ の傾きをそれぞれ $-\dfrac{1}{p},\, p\ (0<p)$ とする。

$y=x^2+ax+b$ と原点を通る直線 $y=kx$ が接しているとして，$x^2+ax+b=kx\cdots①$

が重解 $-\dfrac{1}{p},\, p\ (0<p)$ をもつとすると

$① \iff x^2+(a-k)\,x+b=0$

これの重解条件 $(a-k)^2-4b=0 \iff k^2-2ak+a^2-4b=0\cdots①$

この解が $k=-\dfrac{1}{p},\, p$ となるので, 解の積：$a^2-4b=-1 \iff \boldsymbol{b=\dfrac{1}{4}\left(a^2+1\right)}\cdots②$

解の和：$p-\dfrac{1}{p}=2a\cdots③$

①で, $D/4=4b$ であるが, ②より $b>0$ なので, ①は a に関わらず常に $-\dfrac{1}{p},\, p\ (0<p)$ の形の 2 実数解をもつ。よって a の値に制限はない。

(2)

放物線 $y=x^2$ 上で傾き $-\dfrac{1}{p},\, p$ の接線を考える。

導関数 $2x=-\dfrac{1}{p},\, p$ とすることにより，接点はそれぞれ

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{2p},\ \dfrac{1}{4p^2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{p^2}{4}\right)$

A，B における法線が y 軸と交わる点までの距離は，傾きを考えて

$L_1=\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{2p},\ L_2=\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{2}$

$L_1:L_2=1:2$ だから $p=2$

元の放物線に戻って，③より，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$

◆コメント◆

(1) の，重解条件を満たす k が 2 つある，という考え方が第一段階，(2) の法線の傾きと

y 軸からの距離の考察が第二段階で，かなり手応えがあったでしょう。新しさを含む問題なので，例年の感じで気軽に解くと，第 1 問から挫折を味わえるかもしれません。とりあえず，放物線を標準形に平行移動する以下のテクニックは役に立つでしょう。

http://www.oran.co.jp/teikyou/about04m.htm