理系第 6 問

定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4+bx+c=\left(x^2+px+q\right)\left(x^2-px+r\right)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p\neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ。

(2) $p\neq 0$ とする。$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b=\left(a^2+1\right)(a+2),\ c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。x の 4 次式

$$x^4+\left(a^2+1\right)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。

解答例

(1)

係数比較により $\boldsymbol{q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right),\ r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)}$

(2)

$$x^4+\left(a^2+1\right)(a+2)x-\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)$$

$$=\left[x^2+px+\frac{1}{2}\left\{p^2-\frac{\left(a^2+1\right)(a+2)}{p}\right\}\right]\left[x^2-px+\frac{1}{2}\left\{p^2+\frac{\left(a^2+1\right)(a+2)}{p}\right\}\right]$$

$\cdots$①

定数項を比較すると

$$p^6+4\left(a+\frac{3}{4}\right)\left(a^2+1\right)p^2-\left(a^2+1\right)^2(a+2)^2=0\cdots②$$

これと与式

$$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$$

を展開した式

$$p^6+\left\{f(a)-\left(a^2+1\right)\right\}p^4+\left\{g(a)-\left(a^2+1\right)f(a)\right\}p^2-\left(a^2+1\right)g(a)=0$$

を比較して，$g(a)=\left(a^2+1\right)(a+2)^2,\ f(a)=a^2+1$ としてみると両式は一致する。

よって $\boldsymbol{f(t)=t^2+1,\ g(t)=\left(t^2+1\right)(t+2)^2}$

(3)

有理数 p を得られる条件を調べる。

整数 $m,\ n\ (m>0)$ を用いて $p=\dfrac{n}{m}$ (既約分数) とおくと，

② $\iff n^2\left\{n^4+(4a+3)\left(a^2+1\right)m^4\right\}=\left(a^2+1\right)^2(a+2)^2m^6$

$m,\ n$ は互いに素だから，n^2 も $n^4+(4a+3)\left(a^2+1\right)m^4$ も m で割り切れない。

よって $m=1$ であり，p は整数で $p=n$ だから

$p^2\left\{p^4+(4a+3)\left(a^2+1\right)\right\}=\left(a^2+1\right)^2(a+2)^2\cdots$③

これは②と同じだから，次のように因数分解できる。

$\left\{p^2-\left(a^2+1\right)\right\}\left\{p^4+f(a)p^2+g(a)\right\}=0$

(i) $p^2=a^2+1$ なる整数 p があるとすると，

連続する平方数から，$p=\pm1,\ a=0$

(ii) $p^4+f(a)p^2+g(a)=0$ なる整数 p があるとすると，

(2) の $f(a),\ g(a)$ を復元して

$p^4+\left(a^2+1\right)p^2+\left(a^2+1\right)(a+2)^2=0$

すべての項が 0 以上なので可能な解は $p=0,\ a=-2$ のみだが，$p=0$ は ① に適さない。

(i)(ii) より，$\boldsymbol{a=0}$

◆コメント◆

　昨年同様，最後は緻密に仕組まれた，創作性の高い問題でした。(2) の唐突な式が，(3) の決定打になるということに気付く必要があります。多くの文字が踊り狂う，複雑な式を，楽しむことができたでしょうか。

◆理系数学全体コメント◆

　図形の要素が少なく，代数計算に圧倒的に比重が置かれた出題でした。計算力は付けておけという，出題者からの強い要請を感じます。確かに，大学で習うもっと複雑な式に適応するためには必要でしょう。

　どれもありがちな問題なのに，受験生にとって，初見の難度が高く感じる良問セットで，東大の傾向は健在です。意外な抵抗感が味わえるのは，どの問題も，受験テクニックの中では割と高度で実力を試すタイプのものが選ばれているからです。こういう傾向

が明白なので，どのような勉強をすればよいかも，おのずと決まってきます。

こうした出題者からのメッセージは，入試当日だけでなく，むしろ普段の学習に活かすべきものです。今回の問題も，試験時間内に解くには難度逸脱の，多分に学習・研究用のものが含まれています。また，実際に，過去の東大の出題の再来も見られます。こういうのは，ある意味予言の書として，活用するといいでしょう。