理系第 5 問

α を正の実数とする。$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha,\ -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める。

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲に $f'(\theta)=0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ。
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる。

解答例

(1)

$f(\theta)=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$

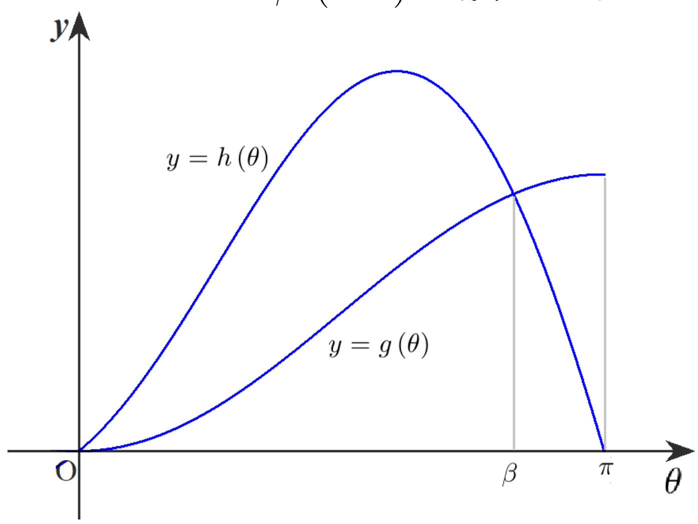
$f'(\theta)=2(\theta+\alpha)(1+\cos\theta)-4\sin\theta$

$f''(\theta)=2(1-\cos\theta)-2(\theta+\alpha)\sin\theta$

ここで $g(\theta)=1-\cos\theta,\ h(\theta)=(\theta+\alpha)\sin\theta$ とおくと，

$y=g(\theta)$, $y=h(\theta)$ のグラフの概形は以下のようになり，$0<\theta<\pi$ において，その前後で $f''(\theta)$ の符号が負から正に変わるような交点をもつ。このときの θ を β とすると，$f'(\theta)$ は $\theta=\beta$ において極小値をとり，$f'(0)=4\alpha$，$f'(\pi)=0$ なので，極小値は負である。

よって $f'(\theta)=0$ となる θ が $0<\theta<\beta\ (<\pi)$ に存在する。



(2)

(1) の $f'(\theta)=0$ の解 $\theta=\gamma$ において $f(\theta)$ は極大値をとる。

この γ が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ にあるためには，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0 \iff \boldsymbol{\alpha < 2-\frac{\pi}{2}}$

◆コメント◆

非常に見通しのいい問題ですが，いきなり主役が $f'(x)$ であるところが，東大っぽいです。東大では二階微分は普通に出題されるので，練習しておくと，このタイプに独特の軽い混乱が避けられます。こういった，ポイントのある頻出テクニックが，東大の傾向です。なお，全体像は次図。