理系第４問

以下の問いに答えよ。

(1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA=LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2) 正の整数 a, b が $a>b$ を満たしているとする。このとき，$A={}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$, $B={}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA=LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

(3) a, b は (2) の通りとし，さらに $a-b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

解答例

(1)

$K=4Q_1+R\ (R=1,\ 3)$, $L=4Q_2+R$ とおくと

$KA=LB$ より $R(A-B)=4(Q_2B-Q_1A)$

R は奇数だから，$A-B$ は 4 の倍数であり，A，B を 4 で割った余りは互いに等しい。

(2)

$a-b=k$ とおいて，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{(4b+4k+1)!k!b!}{(4k)!(4b+1)!(b+k)!}$

$k=1$ のとき

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{(4b+5)(4b+3)(2b+1)}{3}$ は $K=3,\ L=(4b+5)(4b+3)(2b+1)$ とすれば $\dfrac{L}{K}$ と表される。

$k=i$ のときに成り立つと仮定すると，奇数 $L_i,\ K_i$ を用いて

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{(4b+4i+1)!i!b!}{(4i)!(4b+1)!(b+i)!}=\dfrac{L_i}{K_i}$

と表され，すると $k=i+1$ のとき

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{(4b+4i+5)(4b+4i+3)(2b+2i+1)}{(4i+3)(2i+1)(4i+1)}\cdot\dfrac{L_i}{K_i}$

よって $\dfrac{A}{B}$ はやはり奇数の比であらわされる。

以上から任意の自然数 k で題意は成り立つ。

(3)

(2) において $K_1=3,\ L_1=(4b+5)(4b+3)(2b+1)$ とおく。また，

$K_{k+1}=(4k+3)(2k+1)(4k+1)K_k$

$L_{k+1}=(4b+4k+5)(4b+4k+3)(2b+2k+1)L_k$

$K_1,\ L_1$ はともに 4 で割った余りが 3 である。また，比

$(4k+3)(2k+1)(4k+1),\ (4b+4k+5)(4b+4k+3)(2b+2k+1)$

も 4 で割った余りは 3 である。

このことから，$K_k,\ L_k$ は 4 で割った余りが 3，1，3，1$\cdots$ と繰り返していくが，$K_k,\ L_k$ を 4 で割った余りは互いに等しい。

よって (1) から $A,\ B$ を 4 で割った余りは互いに等しい。

(4)

(3) から，

$2021=4\cdot505+1,\ 37=4\cdot9+1$

$505=4\cdot51+1,\ 9=4\cdot2+1$

${}_{51}\mathrm{C}_2=1275=4\cdot318+3$

よって ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りは **3** である。

◆コメント◆

　二項係数は状況が見えにくいので，帰納法で手探りするしかないのですが，$a-b$ が問題文にあるので，同じ帰納法でも，せっかくなので $a-b=k$ に注目してみると，上記のように，少し式が簡単になります。分母分子で偶数が消えること，なんとなく割った余りが反転していくこと，に気が付けば部分点，というところでしょうか。