理系第 3 問

関数

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}$$

に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における C の接線を

$$l: y=g(x)$$

とする。

(1) C と l の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ。

(2) (1) で求めた共有点の認座標を α とする。定積分

$$\int_{\alpha}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

を計算せよ。

解答例

(1)

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ とすると $f'(x)=\dfrac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$

$f'(1)=\dfrac{1}{8}$，$f(1)=\dfrac{1}{4}$ から $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$

l は $y=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8}$

そこで $\dfrac{x}{x^2+3}=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{8} \iff x^3+x^2-5x+3=0 \iff (x-1)^2(x+3)=0$

よって A 以外の交点を与える x は $\boldsymbol{x=-3}$

(2)

$\{f(x)-g(x)\}^2=\dfrac{x^2}{(x^2+3)^2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x(x+1)}{x^2+3}+\dfrac{1}{64}(x+1)^2$

以下，適宜 $x=\sqrt{3}\tan\theta$ と置き換えて，

$A=\displaystyle\int_{-3}^{1}\frac{x^2}{(x^2+3)^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{6}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\sqrt{3}\pi}{24}-\frac{1}{8}$

$B=\displaystyle\int_{-3}^{1}\frac{x(x+1)}{x^2+3}$ とおくと

$\dfrac{x(x+1)}{x^2+3}=1+\dfrac{x}{x^2+3}-\dfrac{3}{x^2+3}$ なので

$\displaystyle\int_{-3}^{1}1dx=4$

© 東京凰鑑学院

$$\int_{-3}^{1} \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\left[\log\left(x^2+3\right)\right]_{-3}^{1} = -\frac{1}{2}\log 3$$

$$\int_{-3}^{1} \frac{3}{x^2+3}\,dx = \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

よって $B = 4 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

$$C = \frac{1}{64}\int_{-3}^{1}(x+1)^2\,dx = \frac{1}{12}$$

求める積分は，$A - \frac{B}{4} + C = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{24}\pi + \frac{\log 3}{8} - \frac{7}{6}}$

◆コメント◆

東大ではおなじみになった，子持積分です。そんな用語はありませんが，積分するために次々に式を分ける必要性が出てきて，しかもその積分法がいちいち異なってきます。数学的な難しさよりも，心理的圧迫の強いタイプです。

© 東京凰鑑学院