理系第 2 問

複素数 $a,\ b,\ c$ に対して整式 $f(z)=az^2+bz+c$ を考える。$i$ を虚数単位とする。

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$f(0)=\alpha,\ f(1)=\beta,\ f(i)=\gamma$ が成り立つとき，$a,\ b,\ c$ をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表せ。

(2) $f(0)$，$f(1)$，$f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

解答例

(1)

$f(0)=c=\alpha\cdots$①

$f(1)=a+b+c=\beta\cdots$②

$f(i)=-a+bi+c=\gamma\cdots$③

①②より $a+b=\beta-\alpha\cdots$④，①③より $-a+bi=\gamma-\alpha\cdots$⑤

④⑤から $b=\dfrac{1-i}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)=\dfrac{1}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)-\dfrac{1}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)i$

$\therefore\ a=\beta-\alpha-b=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}(\beta-\gamma)+\dfrac{1}{2}(\beta+\gamma-2\alpha)i}$

(2)

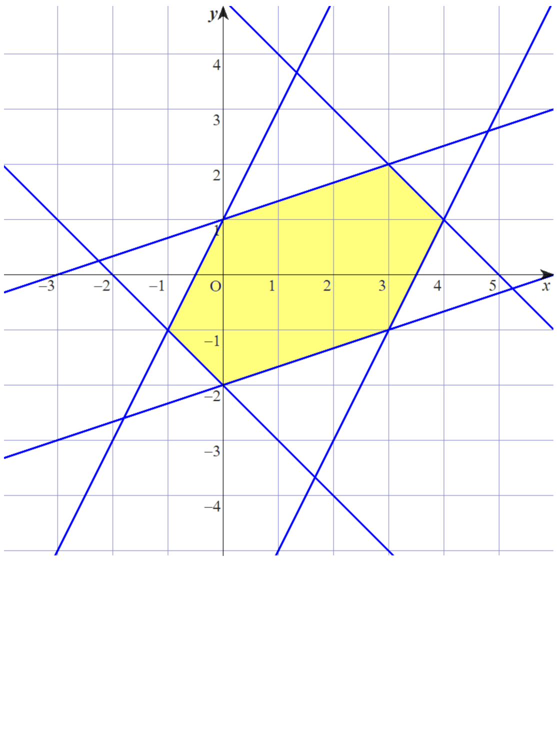
$f(2)=4a+2b+c=(3\beta-\alpha-\gamma)+(\beta+\gamma-2\alpha)i$

$x=3\beta-\alpha-\gamma,\ y=\beta+\gamma-2\alpha$ とおいて $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を 1 文字ずつ消去すると

$3y-x=4\gamma-5\alpha,\ x+y=4\beta-3\alpha,\ 2x-y=5\beta-3\gamma$

$4\cdot1-5\cdot2\leqq 3y-x\leqq 4\cdot2-5\cdot1$ などから，

$\dfrac{1}{3}x-2\leqq y\leqq\dfrac{1}{3}x+1,\ -x-2\leqq y\leqq -x+5,\ 2x-7\leqq y\leqq 2x+1$




（境界を含む）

◆コメント◆

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の間に特に縛りがないようなので，普通に不等式を使って六角領域を求めます。不等式と六角領域の問題も，東大で過去に出題されています。多くの受験生にとっては，それよりも $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を書き分けながら計算を続行する器用性が求められたでしょう。どちらかというと，文字の筆記に関する能力を見ているようなところがあります。

ちなみに，$3\cdot 1-2-2 \leqq x = 3\beta-\alpha-\gamma \leqq 3\cdot 2-1-1$ とするだけではなぜ不十分なのか，そこの理解が実はこの問題の本質です。過去に東大理系で同様の六角領域の問題が出ているので，それを解決したかどうかが，試されています。